Справочная
Математическая
Библиотека

Математический анализ

Вычисление элементарных функций

Физматгиз · 1963

СОДЕРЖАНИЕ

Глава III

Тригонометрические, гиперболические и им обратные функции

Глава IV

Алгоритмы вычислений элементарных функций на некоторых отечественных программно-управляемых машинах

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Специальные многочлены и другие функции

II. Числовые таблицы

ПРЕДИСЛОВИЕ

Решение многих математических задач требует вычисления значений элементарных функций для тех или иных значений аргумента. Уже в древности и в средние века появились таблицы значений тригонометрических функций и формулы для приближенного вычисления некоторых функций, например итерационная формула Герона для извлечения квадратного корня (см. гл. I, § 3, п. 6, 1°) и др. В дальнейшем вычисление значений элементарных функций и составление их таблиц были важным стимулирующим фактором развития математического анализа. Для этих именно целей появились степенные ряды (у Меркатора — для логарифмов, у Ньютона — для тригонометрических и обратных тригонометрических функций, а также для степенных функций, у Эйлера — для показательной функции и т. д.). Применялись итерационные процессы (например, метод Ньютона) для решения уравнений.

Математики XVIII века (Ламберт, Эйлер, Лагранж и др.) пользовались цепными дробями для представления элементарных функций. В последние годы для вычисления функций стали широко применять их разложения по ортогональным многочленам, в особенности по многочленам Чебышева, дающим хорошую сходимость.

С созданием электронных программно-управляемых быстродействующих машин, с помощью которых можно находить значения элементарных функций в массовом порядке, возникли разнообразные алгоритмы для вычислений с нужной точностью значений этих функций. Выбор алгоритмов зависит от особенностей машины (например, допускаемой точности вычислений, набора выполняемых ею элементарных операций, наличия фиксированной или «плавающей» запятой, допускаемой загрузки «памяти» и т. д.). Обычно на основе выбранного алгоритма составляются специальные «стандартные программы», которые вводятся в машину, заставляя ее в соответствующие моменты вычислять требуемые значения функции. Эти алгоритмы часто основаны на разложении в ряд по ортогональным многочленам, на итерационных методах и т. д.

За последние годы вышло в свет большое число работ, посвященных вычислению тех или иных функций, отдельным приближенным формулам и т. д. Появляющиеся в математической литературе новые формулы объединяются с уже известными, систематизируются и издаются время от времени в виде таблиц, справочников и т. д. Примером могут служить широко известные весьма обстоятельные «Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений» И. С. Градштейна и И. М. Рыжика. Однако что касается элементарных функций, то для них появился лишь недавно справочник С. Гастингса по многочленным и рациональным аппроксимациям, материал которого использован в настоящей книге [49]. Достаточно же полных сборников вычислительных формул элементарных функций нет.

В настоящем справочнике описаны методы вычисления многочленов, элементарных дробей, показательных и логарифмических функций, тригонометрических и обратных тригонометрических функций, гиперболических и обратных гиперболических функций, а также приводятся относящиеся к ним различные формулы. Эти методы и формулы играют важную роль, поскольку при численном решении задач большой труд составляет вычисление значений элементарных функций и их различных комбинаций. В справочнике дается много разных представлений элементарных функций в виде степенных рядов, рядов по ортогональным и другим многочленам, цепных дробей, пределов итерационных процессов и т. д. и приводится большое количество приближенных формул для вычисления элементарных функций с той или иной степенью точности. Основная часть справочника завершается изложением алгоритмов вычисления элементарных функций на программно-управляемых цифровых машинах: «Стрела», БЭСМ, М-2, М-3, «Урал».

В приложениях приведены краткие сведения о некоторых встречающихся в справочнике функциях, связанных с элементарными: о гипергеометрической функции, гудермaниане, гармонических и некоторых специальных многочленах.

Приведены отдельные многочлены Лежандра, Чебышева, Лагерра и Эрмита, а также числовые таблицы некоторых систем чисел и специальных функций, используемых для представления элементарных функций.

Порядок распределения материала в справочнике принят следующий. Каждый параграф посвящен определенной функции или группе функций. Напоминаются некоторые общие сведения, относящиеся к этим функциям, а затем следует материал о методах вычислений, который располагается в таком порядке: разложения в степенные ряды и бесконечные произведения, разложения по ортогональным и другим системам многочленов (а также серии многочленных приближений для любой степени); конкретные многочленные приближения; разложения в цепные дроби и другие серии рациональных приближений; конкретные рациональные приближения; итерационные процессы.

Поскольку все элементарные функции являются аналитическими, то представления их рядами, цепными дробями и т. п. справедливы и в некоторой области комплексного переменного. В основном имеются в виду функции в действительной области, но в ряде случаев указывается на представимость разложений в соответствующей части плоскости комплексного переменного.

Для многих формул приводятся таблицы фигурирующих в них коэффициентов.

В некоторых случаях даны алгоритмы вычисления значений функций «цифра за цифрой», т. е. алгоритмы последовательного вычисления цифр α_0, α_1, α_2, ... двоичного разложения числа y; при этом запись этого разложения

$$y=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \quad \alpha_n\ldots,$$

где α_i — цифры 0 или 1, означает, что

$$y=\alpha_0+\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2^2}+\ldots+\frac{\alpha_n}{2^n}+\ldots$$

В справочнике приняты следующие единообразные обозначения. Если приводится конкретное приближенное выражение $Q(x)$ для функции $F(x)$, то через $r(x)$ обозначается погрешность: $r(x)=F(x)-Q(x)$, а через r — верхняя граница $|r(x)|$ на рассматриваемом интервале. Относительная погрешность $\frac{r(x)}{F(x)}$ обозначается через $\varepsilon(x)$, а верхняя граница $|\varepsilon(x)|$ на рассматриваемом интервале — через ε.

Если функция $F(x)$ задана бесконечным рядом

$$F(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x),$$

то остаточный член ряда обозначается через $r_n(x)$:

$$r_n(x)=F(x)-\sum_{k=0}^{n} a_k(x). \tag{0.1}$$

Для обозначения цепной дроби принята компактная запись

$$F=a_0+\frac{a_1}{d_1+}\frac{a_2}{d_2+}\cdots+\frac{a_n}{d_n+}\cdots$$

вместо

$$F=a_0+\cfrac{a_1}{d_1+\cfrac{a_2}{d_2+\cdots+\cfrac{a_n}{d_n+\cdots}}}.$$

При этом через $\frac{A_n}{D_n}$ обозначается n-я подходящая дробь

$$a_0+\frac{a_1}{d_1+}\frac{a_2}{d_2+}\cdots+\frac{a_n}{d_n}.$$

В том случае, когда F, a_i, d_i суть функции x, то

$$A_n=A_n(x), \quad D_n=D_n(x).$$

Иногда выражения для $\frac{A_n}{D_n}=\frac{A_n(x)}{D_n(x)}$ записываются под соответственными «звеньями» цепной дроби:

$$\begin{array}{ccccc} a_0+ & \frac{a_1}{d_1+} & \frac{a_2}{d_2+} & \cdots+ & \frac{a_n}{d_n} \\ \frac{a_0}{1} & \frac{A_1}{D_1} & \frac{A_2}{D_2} & & \frac{A_n}{D_n}. \end{array}$$

О рекуррентных соотношениях A_n, D_n см. [I], гл. V. Через $r_n(x)$ обозначается разность

$$r_n(x)=F(x)-\frac{A_n(x)}{D_n(x)}. \tag{0.1'}$$

Аналогично, если $y = F(x)$ рассматривается как предел итерационной последовательности $\{y_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, то

$$r_n(x) = F(x) - y_n(x) \text{ и т. д.}$$

Во всех этих случаях, если функция задается на некотором интервале, то r_n обозначает верхнюю границу $|r_n(x)|$ на этом интервале:

$$|r_n(x)| \leqslant r_n.$$

Для относительной ошибки принята запись

$$\varepsilon_n(x) = \frac{r_n(x)}{F(x)}, \tag{0.2}$$

и тогда ε_n означает верхнюю границу $|\varepsilon_n(x)|$ на соответствующем интервале.

Что касается литературных ссылок, то следует иметь в виду, что первое число, расположенное справа от формулы или таблицы, служит указанием на источник, из которого взята формула или таблица (список литературы помещен в конце справочника). Второе число, заключенное в скобки, указывает номер страницы источника.

В заключение считаем своим долгом выразить благодарность: В. Я. Пану за представленную рукопись его работы по оптимальным методам вычисления многочленов, В. С. Линскому и А. Н. Хованскому за содействие в подборе материала; В. И. Важенину и М. Н. Обувалину за представление некоторых формул по аппроксимации функций многочленами; И. Я. Акушскому, Е. А. Жоголеву и Г. С. Рослякову за предоставление материала об алгоритмах вычислений элементарных функций на некоторых программно-управляемых быстродействующих машинах.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из самых распространенных математических операций является вычисление значений элементарных функций: рациональных, степенных, тригонометрических и им обратных, показательных и логарифмических, гиперболических и им обратных.

При ручном счете вычисление элементарных функций сводится к выборке из таблиц и, если нужно, к несложной интерполяции.

В настоящее время существует обширный набор таблиц элементарных функций разной точности и назначения (см. «Справочник по математическим таблицам» [4], [16]).

Последние годы ознаменовались ростом объема вычислений в связи с появлением быстродействующих цифровых машин. В такие машины нецелесообразно вводить большую информацию о функциях (типа больших таблиц); в них используются алгоритмы вычисления этих функций, сводящиеся к выполнению некоторого числа элементарных операций и требующие ввода лишь небольшой исходной информации (набора, например, коэффициентов формул и т. п.)

Элементарными операциями в этих машинах являются: арифметические действия; такие операции, как взятие абсолютной величины числа, взятие целой и дробной частей числа (см., например, записанные с помощью этих операций формулы приведения на стр. 91); некоторые логические операции, управляющие вычислительным процессом (если, например, для вычисления функции на разных интервалах применяются различные алгоритмы, эти операции при задании значения аргумента направляют ход вычислений по нужному алгоритму).

В связи с потребностями машинных вычислений появлялась обширная литература, посвященная представлению элементарных функций и алгоритмам их приближенного вычисления. Справочники общего типа (например, Градштейна и Рыжика [26]) содержат материал по представлению функций степенными рядами; книга, например, Хованского [34] — по представлению цепными дробями; ряд статей в журнале Tables — по разложению в ряды по ортогональным функциям. Упомянутый справочник [49] содержит большой материал по наилучшим многочленным и рациональным приближениям элементарных функций. При описании отдельных машин приводятся те алгоритмы вычисления элементарных функций, на основе которых составлены «стандартные программы» их вычисления на данной машине (в гл. IV собраны эти алгоритмы для ряда машин).

Выбор таких алгоритмов определяется параметрами машины, например точностью проводимых вычислений, системой счисления (при двоичной системе вычисление показательных и логарифмических функций сводится к вычислению 2^x на интервале $(0, 1)$ и $\log_2 x$ на интервале $(1, 2)$ или $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, итерационные процессы «цифра за цифрой» специфичны для двоичной системы), характером задания чисел (в машинах с «плавающей» или фиксированной запятой), набором элементарных операций (при отсутствии деления в числе элементарных операций целесообразно пользоваться алгоритмами, не содержащими деления, например при вычислении $\sqrt{x}$ вместо формулы Герона применяют итерационный процесс, вместе с тем необходимо вводить специальные алгоритмы для вычисления $\frac{1}{x}$).

Приближенные методы вычисления функции $f(x)$ на интервале (a, b) сводятся к вычислению некоторой «близкой» ей функции $\varphi(x)$. Возникает «ошибка метода» — разность

$$r(x) = f(x) - \varphi(x). \tag{0.3}$$

Для оценки точности такого приближения вводятся некоторые числовые характеристики ошибки $r(x)$ на (a, b), которые называются «нормами» функции $r(x)$. Наибольшее значение имеют следующие (употреблявшиеся фактически еще П. Л. Чебышевым):

1) *«равномерная норма» ошибки* $r(x)$, т. е. максимум $r(x)$ на интервале (a, b):

$$\|r\|_c = \max_{x \subset (a,\,b)} |r(x)| = \max_{x \subset (a,\,b)} |f(x) - \varphi(x)|, \qquad (0.4)$$

$\|r\|_c$ совпадает с тем, что мы обозначили выше просто через r;

2) *«квадратическая норма» ошибки* $r(x)$ (среднеквадратическое) на (a, b):

$$\|r(x)\|_2 = \sqrt{\int_a^b [r(x)]^2\,dx} = \sqrt{\int_a^b [f - \varphi]^2\,dx}, \qquad (0.5)$$

или, более общо, квадратическая норма с весом $\varrho(x) > 0$, где ϱ — фиксированная положительная функция на (a, b):

$$\|r(x)\|_{2,\varrho} = \sqrt{\int_a^b r^2 \varrho\,dx}. \qquad (0.5')$$

Особое значение имеет приближение функций многочленами ввиду простоты вычисления последних (а также рациональными функциями). Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на (a, b). Рассмотрим совокупность $\{P_n(x)\}$ многочленов n-й степени. Для любой данной нормы (0.4) или (0.5), (0.5′) и выбранного интервала (a, b) среди всех этих многочленов есть и притом единственный, для которого норма разности $r(x) = f(x) - P_n(x)$ наименьшая. Этот многочлен называется *многочленом n-й степени наилучшего приближения к* $f(x)$ *на* (a, b) (в смысле данной нормы). Когда говорят просто «многочлен наилучшего приближения», то подразумевают — в смысле равномерной нормы.

Сделаем несколько замечаний о некоторых представлениях функций.

1. Степенные ряды. Элементарные функции принадлежат к числу представимых степенными рядами. Рассмотрим ряд Тейлора — Маклорена для данной функции $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k. \qquad (0.6)$$

Обрывая его на n-м члене, получим многочлен $S_n(x)$ n-й степени (конечную строку Тейлора)

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k. \tag{0.7}$$

Многочлен $S_n(x)$ обладает следующими свойствами:

1) $$f(x) = S_n(x) + o(x^n); \tag{0.8}$$

при этом $S_n(x)$ является единственным из многочленов n-й степени $P_n(x)$, для которого $f(x) - P_n(x) = o(x^n)$.

2) Рассмотрим систему многочленов n-й степени наилучшего приближения к $f(x)$ на интервалах $(0, h)$ как в смысле равномерной, так и квадратической нормы при любом весе $\varrho(x) > 0$. *При $h \to 0$ эти многочлены стремятся к $S_n(x)$.* Поэтому говорят: *многочлен $S_n(x)$ дает наилучшее приближение к функции $f(x)$ вблизи нуля.*

Степенные разложения некоторых элементарных функций являются частными случаями гипергеометрических рядов (см. Приложения § 3). Коэффициенты степенных рядов некоторых других элементарных функций выражают через числа Бернулли или Эйлера *).

Если функция $F(x, p)$ двух переменных x, p разлагается в степенной ряд по p с коэффициентами $a_n(x)$—функциями от x:

$$F(x, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x)}{n!} p^n, \tag{0.9}$$

то $F(x, p)$ называется *образующей* для системы функций $\{a_n(x)\}$. Фиксируя в (0.9) значение $p = p_0$, получим разложение функции $F_0(x) = F(x, p_0)$ по функциям $a_k(x)$ (см., например, гл. I, § 3, п. 2, 1°), фиксируя значение $x = x_0$, получим разложение $\Phi_0(p) = F(x_0, p)$ в степенной ряд по p (например, гл II, § 1, п. 2, 5°).

2. Ортогональные ряды многочленов. Система многочленов $\{P_n(x)\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ называется *ортогональной на* (a, b) *с весом* $\varrho(x) > 0$, если $\int_a^b P_n(x) P_m(x) \varrho(x)\, dx = 0$ при $n \neq m$.

*) См. *СМБ*, Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби), стр. 350 и 359.

Весьма важную роль для приближенного вычисления функций $f(x)$ имеют их разложения в ряды Фурье по многочленам $P_n(x)$ (см. [I], гл. IV):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x). \tag{0.10}$$

Вычисление первых n коэффициентов Фурье c_n сводится к $(n+1)$-кратному последовательному интегрированию функции $f(x)\varrho(x)$ (см. [I], стр. 224); обрывая ряд (0.10), получаем конечную сумму Фурье для функции $f(x)$:

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x). \tag{0.11}$$

Теорема. *Многочлен $Q_n(x)$ есть многочлен наилучшего квадратического приближения на (a, b) с весом ϱ к функции $f(x)$.*

Важно вместе с тем заметить, что многочлены $Q_n(x)$ дают в ряде случаев хорошее приближение к $f(x)$ и в смысле равномерной нормы. Особенно это относится к разложениям по многочленам Чебышева, ортогональным многочленам с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на интервале $(-1, 1)$. Они являются важным источником многочленных приближений, в частности для элементарных функций. Довольно хорошее равномерное приближение дают и суммы по многочленам Лежандра.

В настоящем справочнике приведен ряд разложений элементарных функций по многочленам Чебышева, Лежандра и другим. В приложениях приводятся таблицы значений этих многочленов (стр. 213—239) и некоторые многочлены (стр. 173—180).

3. Цепные дроби ([I], гл. V). Основным источником рациональных приближений функций $f(x)$ является разложение их в цепные дроби вида

$$\frac{b_0}{1} \dotplus \frac{b_1}{a_1} \dotplus \frac{b_2}{a_2} \dotplus \ldots, \tag{0.12}$$

у которых b_i и a_i суть многочлены относительно аргумента x. Тогда подходящие дроби $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ для (0.12) дают рациональные приближения разлагаемой функции $f(x)$.

Особую роль играют цепные дроби вида

$$c_0+\frac{c_1x}{1}+\frac{c_2x}{2}+\ldots \tag{0.12'}$$

Пусть дан степенной ряд

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots \tag{0.13}$$

Дробь (0.12′) и ряд (0.13) называются *сопряженными* друг другу, если разложение в ряд n-й подходящей дроби цепной дроби (0.12′) отличается от ряда (0.13) лишь коэффициентами при степенях x, больших n. В [1], стр. 282, приведен алгоритм построения сопряженной дроби вида (0.12′) к заданному степенному ряду. Заметим, что дробь (0.13) часто сходится к соответственной функции $f(x)$ в большей области, чем сопряженный ей степенной ряд Тейлора.

В [1], стр. 303, приводится формула Тилле разложения функций в цепные дроби, являющаяся аналогом ряда Тейлора в теории цепных дробей. Там же на стр. 309—311 приводится формула Обрешкова — обобщение формулы Тейлора, с помощью которой получены серии рациональных приближений для некоторых элементарных функций.

Пусть заданная функция $f(x)$ разлагается в окрестности $x=0$ в ряд (0.13). Система рациональных функций $\frac{R_k(x)}{S_l(x)}$, где $R_k(x)$ и $S_l(x)$ — многочлены соответственно степеней k и l (k, $l=0, 1, 2, \ldots$), образует систему аппроксимаций Падэ, если разложение в степенной ряд по x дроби $\frac{R_k(x)}{S_l(x)}$ отличается от ряда (0.13) лишь членами при x в степенях, больших $k+l+1$. Это является обобщением системы подходящих дробей сопряженных дроби (0.12).

4. Интерполяция. Одним из источников получения многочленных приближений являются интерполяционные формулы. Хорошие результаты с точки зрения приближений дают интерполяционные формулы на $(-1, 1)$, узлы которых совпадают с нулями многочленов Чебышева (см. стр. 183, а так же [1], стр. 255).

5. Наилучшие многочленные и иные приближения. Теория наилучших многочленных (и других) приближений в смысле равномерной нормы была создана П. Л. Чебышевым.

Пусть для непрерывной функции $f(x)$ построен многочлен $P_n(x)$ наилучшего приближения (в смысле равномерной нормы) для $[a, b]$. Тогда разность

$$r(x) = f(x) - P_n(x)$$

принимает в $n+1$ точках ξ_i отрезка $[a, b]$, $a \leqslant \xi_1 < \xi_2 < \ldots$ $\ldots < \xi_{n+1} \leqslant b$, значения $\pm h$, где $h = \| r(x) \|_c = \max_{x \subset [a, b]} |r(x)|$, причем если $r(\xi_i) = h$, то $r(\xi_{i+1}) = -h$ (теорема Чебышева). На этом свойстве многочленов наилучшего приближения $P_n(x)$ основаны итерационные процессы их построения. Заметим, что в качестве хорошего приближения к $P_n(x)$ можно взять интерполяционный многочлен к $f(x)$ с узлами в нулях многочлена Чебышева n-й степени или конечную сумму ряда Фурье по этим многочленам.

Рассматривается и более общая задача: задан класс «хороших» функций $\varphi(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$, зависящих от параметров $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Для каждого набора значений параметров равномерная норма ошибки

$$\| r(x) \|_c = \| f(x) - \varphi(x, a_1, \qquad a_n) \|_c$$

на заданном интервале (a, b) есть функция этих параметров. О той функции этого класса $\varphi_0(x) = \varphi(x, a_1^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)})$, для которой эта норма ошибки наименьшая, говорят, что она дает *наилучшее приближение к* $f(x)$ *на* (a, b). При этом для многих важных классов функций $\varphi(x, a_1, \ldots, a_n)$ ошибка наилучшего приближения $r(x) = f(x) - \varphi(x, a_1^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)})$ сохраняет указанное выше свойство ошибки многочленов наилучшего приближения — $r(x)$ принимает свои экстремальные значения $\pm h$, где $h = \| r(x) \|_c$ в $n+1$ точках с чередованием знаков в смежных точках. Поэтому методы построения многочленов наилучшего приближения, основанные на этом свойстве, распространяются и на такие более общие приближения. Примером могут служить: $\varphi(x, a_0, a_1, \ldots, a_n) = (\sum_{k=0}^{n} a_k x^k)^\alpha$ (степени многочленов), рациональные функции и т. д. (см. [49]).

6. Итерационные процессы. Они заключаются в построении итерационной последовательности $\{y_n = y_n(x)\}$, сходящейся к функции $y(x)$, где $y_0(x)$ — начальное приближение и $y_n = f(y_{n-1})$, $n \geqslant 1$. Важнейшим источником таких процессов является итерационный метод решения уравнения

$$F(x, y) = 0, \tag{0.14}$$

которому удовлетворяет функция $y = y(x)$, например метод Ньютона:

$$y_{n+1} = y_n - \frac{F(x, y_n)}{F_y(x, y_n)}. \tag{0.15}$$

Обозначим: $r_n(x) = y(x) - y_n(x)$. При методе Ньютона $r_{n+1}(x) = O(r_n^2(x))$. Этим объясняется быстрая сходимость в ряде случаев этого метода.

Пример 1. $y = \sqrt{x}$ удовлетворяет уравнению (0.14), где $F = y^2 - x$, $F_y = 2y$,

$$y_{n+1} = y_n - \frac{y_n^2 - x}{2y_n} = \frac{1}{2}\left(y_n + \frac{x}{y_n}\right)$$

(формула Герона, см. гл. I, § 3, п. 6, 1°).

Пример 2. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ удовлетворяет (0.13) при $F = x - y^{-2}$ и $F_y = 2y^{-3}$,

$$y_{n+1} = y_n - \frac{x - y_n^{-2}}{2y_n^{-3}} = \frac{1}{2}(3y_n - xy_n^3)$$

(см. гл. I, § 3, п. 6, 2°).

Начальное приближение $y_0(x)$ стараются выбрать так, чтобы оно просто вычислялось (например, в виде константы, линейной функции) и чтобы по возможности меньшее число итерации давало приближение с нужной точностью.

Метод Ньютона используется для уточнения приближения $y_0(x)$ функции $y(x)$, удовлетворяющей (0.14).

7. Дифференциальные уравнения. Элементарные функции являются решениями простых дифференциальных уравнений. Например, $y = \sin x$ и $y = \cos x$ являются решениями уравнений $(y')^2 + y^2 = 1$ и $y'' + y = 0$, $y = \operatorname{tg} x$ — уравнения $y' = 1 + y^2$ и т. д. См. таблицу A в [II], стр. 280—281.

В машинах для решений дифференциальных уравнений ввод элементарных функций достигается путем решения дифференциального уравнения, которому эта функция удовлетворяет. В [1], гл. V, § 3, приведен метод Лагранжа решения дифференциальных уравнений одного класса, дающий разложение решения в цепную дробь, и применение этого метода к разложениям функций $(1+x)^{\nu}$, $\operatorname{arctg} x$, $\ln x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{th} x$ и т. д. В книге К. Ланцоша [17] приводится созданный автором τ-метод решения некоторых дифференциальных уравнений, дающий серии приближений многочленных и рациональных для функций, являющихся решениями этих уравнений.

Замечание. Иногда разбивают интервал задания функции $f(x)$ на подынтервалы с тем, чтобы в каждом из них вычислить значение $f(x)$ своим алгоритмом с нужной точностью при меньшем числе действий, но при большом дроблении усложняется «логика» вычислений и, как правило, увеличивается исходная информация.

Элементарные функции удовлетворяют функциональным уравнениям, связывающим значения функций для разных аргументов. Эти соотношения вместе с соответственными преобразованиями переменных позволяют сводить вычисление этих функций к вычислению их в определенном интервале. Часто используется следующее преобразование переменных: $y=\frac{1}{b-a}[2x-(b+a)]$ — преобразование интервала (a, b) оси x в интервал $(-1, 1)$ оси y; и в частности: $y=2x-3$ $\left(x=\frac{3}{2}+\frac{y}{2}\right)$ — интервала $(1, 2)$ в интервал $(-1, 1)$ и обратно. Формула $y=\frac{1}{x}$ дает преобразование интервала $(1, \infty)$ в $(0, 1)$ и обратно; $y=\frac{x-1}{x+1}$ — интервала $(0, \infty)$ в $(-1, 1)$ и обратно.

Пример 3. Формула 1° в гл. II, § 1, п. 3 для $a=\ln 2$ при преобразовании интервала $(-1, 1)$ в интервал $(0, 1)$ переходит в формулу 2°.

ГЛАВА I

РАЦИОНАЛЬНЫЕ И СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Многочлены *)

1. Общие сведения. В вычислительной практике часто приходится определять значения многочленов при заданных значениях аргумента. Нередко приближенное вычисление значений функций сводится к вычислению аппроксимирующих многочленов.

Широкое применение при вычислении многочленов имеет *правило Горнера*, по которому многочлен n-й степени

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

представляется в виде

$$P_n(x) = (\ldots((a_0 x + a_1) x + a_2) x + \ldots + a_{n-1}) x + a_n, \quad (1.1)$$

а вычисление значений $P_n(x)$ производится в порядке, определяемом скобками.

Вычисление многочлена $P_n(x)$ по этой схеме требует выполнения n умножений и $n-k$ сложений (где k есть число коэффициентов a_i, равных нулю). Если $a_0 = 1$, то требуется выполнить $n-1$ умножений. Можно показать, что для многочленов общего вида нельзя построить схему более экономную по числу операций, чем схема Горнера.

При вычислении многочленов специального вида может потребоваться меньшее число операций, чем по универсальной схеме Горнера. Например, вычисление степени x^n по

---

*) Свойства многочленов изложены в выпуске серии «Справочная математическая библиотека» — А. П. Мишина и И. В. Проскуряков «Высшая алгебра».

схеме Горнера означает последовательное перемножение n множителей $(x \cdot x \ldots x)$ и требует выполнения $n-1$ умножений. Но для нахождения, например, x^8 последовательно находят $x^2 = x \cdot x$, $x^4 = x^2 \cdot x^2$, $x^8 = x^4 \cdot x^4$, т. е. выполняют три умножения вместо семи.

При вычислении многочлена $P_n(x)$ иногда применяются схемы вычислений, состоящие из двух этапов: на первом этапе путем действий *только над коэффициентами этого многочлена* он преобразуется к специальному виду; на втором этапе производится уже вычисление полученного многочлена специального вида для заданных значений аргумента. При этом может оказаться, что число операций на втором этапе будет меньше, чем по схеме Горнера. Такие методы вычислений целесообразны, когда приходится вычислять значения многочлена $P_n(x)$ для большого числа значений x (так как первый этап вычислений выполняется лишь один раз), например применительно к многочленам, используемым для приближенного вычисления элементарных функций. В дальнейшем, говоря о числе операций, необходимых для вычисления многочлена $P_n(x)$, будем иметь в виду число операций, необходимых для выполнения лишь второго этапа вычислений.

Во всех приведенных ниже примерах вычисление многочленов $P_n(x)$ по таким методам сводится к последовательному вычислению некоторых вспомогательных многочленов, причем первый этап заключается в нахождении коэффициентов этих многочленов.

Приведем, например, схему Дж. Тодта [29] для вычисления произвольных многочленов $P_6(x)$ шестой степени

$$P_6(x) = x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$$

при помощи вспомогательных многочленов

$$p_1(x) = x(x + b_1), \quad p_2(x) = (p_1 + x + b_2)(p_1 + b_3),$$
$$p_3(x) = (p_2 + b_4)(p_1 + b_5) + b_6,$$

где коэффициенты b_i определяются таким образом, чтобы

$$p_3(x) \equiv P_6(x).$$

Из последнего тождества сравнением коэффициентов при одинаковых степенях x получаем систему уравнений для определения искомых коэффициентов b_i:

$$
\begin{aligned}
3b_1+1&=A,\\
3b_1^2+2b_1+b_2+b_3+b_5&=B,\\
b_1^3+b_1^2+2b_1b_2+2b_1b_3+2b_1b_5+b_3+b_5&=C,\\
b_1^2b_2+b_1^2b_3+b_1^2b_5+b_1b_3+b_1b_5+b_2b_3+b_2b_5+b_3b_5+b_4&=D,\\
b_1b_2b_3+b_1b_2b_5+b_1b_3b_5+b_1b_4+b_3b_5&=E,\\
b_2b_3b_5+b_4b_5+b_6&=F.
\end{aligned}
$$

Система легко решается методом подстановок, но при этом приходится решать квадратные уравнения, и коэффициенты b_i могут оказаться комплексными. Если же коэффициенты окажутся действительными, то вычисления требуют трех умножений и семи сложений вместо пяти умножений и шести сложений по схеме Горнера.

Аналогичное преобразование распространяется и на многочлены высших степеней.

Ю. Л. Кетков [14] дал общее представление многочлена n-й степени для $n\geqslant 6$, всегда приводящее к действительным выражениям и требующее для вычисления многочлена n-й степени выполнения $[(n+1)/2]+[n/4]$ умножений и $n+1$ сложений.

Схема Кеткова сводится, например, при $n=2k$ к последовательному нахождению многочленов:

$$
\begin{aligned}
&N_2(x)=x(b_0+x),\\
&N_4(x)=(N_2+b_1+x)(N_2+b_2)+b_3,\\
&N_6(x)=N_2N_4+b_4x+b_5,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&N_{2k}(x)=(N_2+\bar{\delta}_kb_{2k-2})N_{2k-2}+\delta_kb_{2k-2}x+b_{2k-1},
\end{aligned}
$$

где $\delta_k=0$, $\bar{\delta}_k=1$, если k четное, и $\delta_k=1$, $\bar{\delta}_k=0$, если k нечетное ($k\geqslant 3$).

Условие $P_n(x)=N_{2k}$ приводит к системе уравнений для вычисления b_i по коэффициентам $P_n(x)$, причем в указанной работе приводится метод их вычисления, всегда дающий действительные коэффициенты b_i.

В работе Э. Белаги [2] дается строгое доказательство невозможности построения схемы вычисления произвольных многочленов n-й степени, использующей на втором этапе меньше чем $\left[\frac{n+1}{2}\right]+1$ умножений и n сложений.

Ниже приводятся схемы В. Я. Пана, требующие для вычисления многочлена $P_n(x)$ на втором этапе количество действий, весьма близкое к числам, указанным в работе Э. Белаги.

2. Методы В. Я. Пана вычисления многочленов. 1°. Для вычисления многочлена $P_n(z)$ в комплексной области строятся вспомогательные многочлены $g(z)$ и

$p_{2l}(z)$ $\left(l=1,\ 2,\ \ldots,\ \left[\frac{n}{2}\right]\right)$, связанные соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} &g(z)=z(z+\lambda_1), \quad p_2(z)=g(z)+z+\lambda_2,\\ &p_{2l}(z)=p_{2l-2}(z)\left[g(z)+\lambda_{2l-1}\right]+\lambda_{2l} \quad (l=2, 3, \ldots, k),\\ &P_n(z)=\begin{cases} a_0p_{2k}(z) & \text{при } n=2k,\\ a_0zp_{2k}(z)+\lambda_n & \text{при } n=2k+1. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

Первый этап вычислений заключается в определении коэффициентов λ_l. Второй этап, т. е. нахождение последовательно многочленов $g(z)$, $p_2(z)$ и т. д., требует $n+1$ сложений и $\left[\frac{n+1}{2}\right]+1$ умножений. Каковы бы ни были коэффициенты $P_n(z)$ при $n\geqslant 4$, существует такой набор комплексных значений параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, что формулы (1.2) позволяют вычислить $P_n(z)$ в произвольной точке z.

Для описания метода определения коэффициентов λ_i достаточно рассмотреть случай четных n. Запишем $p_{2l}(z)$ и $g(z)+\lambda_{2l-1}$ $(l=2, 3, 4, \ldots, k)$ соответственно в виде

$$z^{2l}+\alpha_1^{(l)}z^{2l-1}+\ldots+\alpha_{2l}^{(l)} \quad \text{и} \quad z^2+\lambda_1 z+\lambda_{2l-1}.$$

Легко находим, что $\alpha_i^{(k)}=\frac{a_i}{a_0}$ $(i=1, 2, \ldots, 2k)$, $\lambda_1=\frac{a_1-a_0}{2ka_0}$. Имеем $p_{2k}(z)=p_{2k-2}(z)\left[z^2+\lambda_1 z+\lambda_{2k-1}\right]+\lambda_{2k}$.

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при каждой степени z в обеих частях равенства, получаем систему алгебраических уравнений для выражений «параметров» λ_{2k-1}, λ_{2k}, $\alpha_j^{(k-1)}$ $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ 2k-2)$ через λ_1, $\alpha_i^{(k)}$ $(i=1, 2, \ldots, 2k)$, а следовательно, через $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Затем аналогичным образом находим выражения для λ_{2k-3}, λ_{2k-2}, $\alpha_l^{(k-2)}$ $(l=1, 2, \ldots, 2k-4)$ через λ_1 и $\alpha_j^{(k-1)}$ $(j=1, 2, \ldots, 2k-2)$ и т. д., пока не дойдем до λ_2. Полученный набор значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и будет искомым. Заметим, что решение каждой из получаемых систем уравнений сводится к решению одного алгебраического уравнения степени l $(l=1, 2, \ldots, k)$.

2°. Для вычисления многочлена $P_n(x)$ в действительной области [23] приводится несколько схем. а) *Схема для многочленов четвертой степени*

$$P_4(x)=a_0x^4+a_1x^3+\ldots+a_4.$$

Представим $P_4(x)$ в виде

$$\left.\begin{aligned} P_4(x) &\equiv a_0\{(g(x)+\lambda_2)(g(x)+x+\lambda_3)+\lambda_4\}, \\ \text{где} \qquad g(x) &= x(x+\lambda_1), \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

здесь

$$\lambda_1=\frac{a_1-a_0}{2a_0}, \quad \lambda_2=\frac{a_3}{a_0}-\lambda_1\frac{a_2}{a_0}+(\lambda_1+1)\lambda_1^2,$$

$$\lambda_3=\frac{a_2}{a_0}-\lambda_1(\lambda_1+1)-\lambda_2, \quad \lambda_4=\frac{a_4}{a_0}-\lambda_2\lambda_3.$$

Например,

$$\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}=\frac{1}{8!}P_4(y), \qquad \text{где} \qquad y=x^2.$$

Тогда

$$P_4(y)=[g(y)+5383,125][g(y)+y-4446,875]+ \\ +23978403,984375,$$

где

$$g(y)=y(y-28,5).$$

б) *Схема для многочленов* $P_n(x)$, *где* $6\leqslant n\leqslant 12$. Используем вспомогательные многочлены

$$g(x)=x(x+\lambda_1), \quad h(x)=g(x)+x,$$
$$r_4(x)=[g(x)+\lambda_2][h(x)+x+\lambda_3]+\lambda_4,$$

а также (в зависимости от значения n) многочлены

$$\left.\begin{aligned} p_6(x) &= r_4(x)[h(x)+\lambda_5]+\lambda_6, \\ p_8(x) &= p_6(x)[g(x)+\lambda_7]+\lambda_8, \\ p_9(x) &= xp_8(x)+\lambda_9, \\ p_{11}(x) &= p_9(x)[g(x)+\lambda_{10}]+\lambda_{11}. \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

При этом

$$P_n(x)=\begin{cases} a_0p_n(x) & (n=6,\ 8,\ 9,\ 11), \\ a_0xp_n(x)+a_n & (n=7,\ 10,\ 12). \end{cases}$$

Первый этап состоит в нахождении коэффициентов λ_i методом, аналогичным изложенному в схеме а).

При $n=6$ и $n=7$ параметры выражаются через a_0, a_1, ..., a_n рационально.

Обозначим

$$p_6(x)=\sum_{k=0}^{6}\alpha_k x^{6-k}.$$

Набор действительных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, подстановка которых в формулы (1.4) позволяет вычислить значение $P_n(x)$ в любой действительной точке x, существует, если только $27\alpha_3-18\alpha_1\alpha_2+5\alpha_1^3\neq 0$.

При $n=6$ или $n=7$ это условие можно переписать в виде

$$27a_3a_0^2-18a_0a_1a_2+5a_1^3\neq 0.$$

в) *Схема для многочлена $P_n(x)$ при $n\geqslant 5$.* Строим вспомогательные многочлены $g(x)$, $h(x)$, $p_s(x)$, где

$$\left.\begin{aligned} &g(x)=x(x+\lambda_1), \quad h(x)=g(x)+x, \quad p_0(x)=x,\\ &p_s(x)=p_{s-1}(x)\{(g(x)+\lambda_{4s-2})(h(x)+\lambda_{4s-1})+\lambda_{4s}\}+\\ &\qquad\qquad +\lambda_{4s+1} \quad (s=1, 2, \ldots, k), \end{aligned}\right\} \quad (1.5)$$

$$P_n(x)\equiv\begin{cases} a_0p_k(x) & \text{при } n=4k+1,\\ a_0xp_k(x)+\lambda_n & \text{при } n=4k+2,\\ a_0[p_k(x)(g(x)+\lambda_{n-1})+\lambda_n] & \text{при } n=4k+3,\\ a_0x[p_k(x)(g(x)+\lambda_{n-2})+\lambda_{n-1}]+\lambda_n & \\ & \text{при } n=4k+4. \end{cases}$$

Эта схема требует на втором этапе $\left[\frac{n}{2}\right]+2$ умножений и $n+1$ сложений.

Набор действительных значений параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, удовлетворяющих выражениям (1.5), всегда существует, если $n\geqslant 5$ и коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ действительны. Чтобы найти эти значения, можно, используя соотношения $p_s(x)=q_s(x)p_{s-1}(x)+\lambda_{4s+1}$, где $q_s=(g(x)+\lambda_{4s-2})(h(x)+\lambda_{4s-1})+\lambda_{4s}$ $(s=k, k-1, k-2, \ldots, 1)$, применить тот же метод, что и выше. Основные отличия следующие. Во-первых, для всех коэффициентов $p_s(x)$ и для трех младших коэффициентов $q_s(x)$ пишутся выражения через коэффициенты $p_s(x)$ и λ_1; параметры λ_{4s-2}, λ_{4s-1}, λ_{4s} выражаются затем через полученные значения коэффициентов $q_s(x)$ и λ_1 по формулам, аналогичным формулам (1.3) схемы а).

При $6\leqslant n\leqslant 12$ предпочтительно пользоваться схемой б), так как нахождение коэффициентов по этой схеме, как правило, проще, и при $n=6$ или $n=8$ она требует меньшего числа операций, чем схема в).

г) В некоторых случаях (например, при работе на счетных машинах, использующих запись чисел с плавающей запятой), *когда n четно и велико* ($n \geqslant 10$), для вычисления многочлена $P_n(x)$ может быть применена следующая схема:

$$\left.\begin{aligned} & g(x)=x(x+\lambda_1), \quad h(x)=g(x)+x, \quad p_2(x)=h(x)+\lambda_2, \\ & p_{2s+2}(x)=p_{2s}(x)[q_s(x)+\lambda_{2s+1}]+\lambda_{2s+2} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ k-1), \\ & P_n(x)=\begin{cases} a_0[p_k(x)+2^N x] & \text{при } n=2k, \\ a_0 x[p_k(x)+2^N x]+a_n & \text{при } n=2k+1, \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad (1.6)$$

где N — натуральное число.

Здесь

$$q_{k-1}(x)=g(x), \quad q_s(x)=\begin{cases} h(x) & \text{при четном } s, \\ g(x) & \text{при нечетном } s, \end{cases}$$

причем $1 \leqslant s \leqslant k-2$.

Эта схема требует $n+2$ сложений, $\left[\frac{n+1}{2}\right]+1$ умножений и, кроме того, один сдвиг запятой — умножение на 2^N.

Метод определения значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ следующий. Сначала фиксируем натуральное значение N, а затем путем, описанным выше, находим искомые действительные значения параметров, соответствующие $\alpha_{2k-1}^{(k)}=\frac{a_{2k-1}}{a_0}-2^N$. Недостаток этой схемы в том, что значения $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \ldots, \lambda_n$ получаются действительными тогда и только тогда, когда для N выбрано достаточно большое значение.

§ 2. Элементарные дроби

1. Степенные разложения.

1°. $$\frac{1}{a+x}=\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{a}\right)^k \qquad |x|<|a|,$$

$$r_{n-1} \leqslant \frac{|p|^n}{1-|p|}, \qquad p=\frac{x}{a}.$$

Например,

$$\frac{1}{1+x}=\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-x)^k, & |x|<1, \\ \frac{1}{x}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)^k, & |x|>1. \end{cases}$$

2°. $\frac{1}{x} = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}x - 1\right)^k, \qquad 1 \leqslant x \leqslant 2, \qquad r_{n-1} \leqslant \frac{1}{3^n}.$

3°. $\frac{1}{(1+x)^m} = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) \ldots$

$\ldots (k+m-1)(-x)^k, \qquad |x| < 1;$

в частности,

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(-x)^k.$$

2. Ортогональные и другие многочленные разложения.

1°. $\frac{1}{a-bx} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} p^k T_k(x)\right),$

$$|b| < a, \qquad |x| \leqslant 1,$$

$$p = \frac{a - \sqrt{a^2-b^2}}{b}, \qquad r_{n-1} = \frac{2p^n}{\sqrt{a^2-b^2}\,(1-p)}.$$

2°. $\frac{1}{a+x} = \frac{1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k q^k T_k(2x-1)}{(a^2+a)^{1/2}}, \qquad 0 < x \leqslant 1,$

$$q = 2a + 1 - 2(a^2 + a)^{\frac{1}{2}}$$

Формула справедлива и для комплексных a при $|\arg a| \leqslant \frac{\pi}{2}$, $a \neq 0$.

3°. $\frac{1}{a-bx} = \frac{2p}{b} \sum_{k=0}^{\infty} p^k u_k(x), \qquad a > b, \quad |x| < 1,$

$$p = \frac{a - \sqrt{a^2-b^2}}{b}, \qquad r_{n-1} = \frac{2p^{n+1}(n+1-np)}{b(1-p)^2}.$$

4°. $\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} p^k T_k(3-2x), \qquad 1 \leqslant x \leqslant 2,$

$$p = 3 - 2\sqrt{2} = 0{,}1715728\ldots < \frac{\sqrt{3}}{10},$$

$$r_{n-1} = \frac{2p^n}{1-p} < 3^{\frac{n+1}{2}} \cdot 10^{-n} < 10^{-\frac{3n-1}{4}}$$

5°. $\frac{1}{1-bx^2}=\frac{1+p}{1-p}\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty} p^k T_{2k}(x)\right), \quad |b|<1, \ |x|\leqslant 1,$

$$p=2-b-2\sqrt{1-b}, \quad r_{n-1}=\frac{2(1+p)}{(1-p)^2}p^n.$$

6°. $\frac{1}{(a-bx)^2}=\frac{2}{b\sqrt{a^2-b^2}}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)p^k U_k(x),$

$$p=\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

7°. $\frac{1}{x^2}=2\sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)p^k U_k(3-2x), \quad 1\leqslant x\leqslant 2,$

$$p=3-2\sqrt{2}=0{,}1715728\ldots$$

3. Бесконечные произведения.

1°. $\frac{1}{1-u}=\prod_{j=0}^{\infty}(1+u^{2^j}), \quad |u|<1.$

При $u=1-xy_0$ формула принимает вид

2°. $\frac{1}{x}=y_0\prod_{j=0}^{\infty}[1+(1-xy_0)^{2^j}].$ 18 (93)

(Такие формулы используются для деления на некоторых машинах.)

4. Итерационные процессы. Итерационная формула для вычисления обратной величины $y=\frac{1}{x}$:

$y_{i+1}=y_i(2-xy_i) \quad (i=0, 1, 2, \ldots), \quad \lim_{i\to\infty} y_i=\frac{1}{x}.$ 18 (92, 93)

Процесс сходится к $\frac{1}{x}$, если модуль относительной погрешности $\varepsilon_0(x)$ начального приближения удовлетворяет неравенству $|\varepsilon_0(x)|=|1-xy_0|<1$.

При $\frac{1}{2}\leqslant x<1$ получается:

а) Наилучшая константа для начального приближения

$$y_0=\frac{4}{3}, \quad \varepsilon_0=\frac{1}{3}.$$

б) Наилучшее линейное приближение

$$y_0=\frac{1}{17}(48-32x), \quad \varepsilon_0=\frac{1}{17}.$$

в) Наилучшее квадратичное приближение

$$y_0=0,45469+(1,71285-x)^2, \quad \varepsilon_0=0,03715.$$

Три итерации при таком приближении дают погрешность менее 2^{-38}.

§ 3. Степенные функции

1. Степенные разложения.

1°. $$(1+x)^\nu=1+\nu x+\frac{\nu(\nu-1)}{2!}x^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-k+1)}{k!}x^k+\ldots$$

Если ν не является натуральным числом или нулем, то ряд сходится абсолютно при $|x|<1$ и расходится при $|x|>1$; при $x=-1$ ряд сходится для $\nu>-1$ и расходится для $\nu\leqslant-1$; при $x=1$ он сходится для $\nu>0$; для ν натурального ($\nu=n$) ряд превращается в конечную сумму.

2°. $$(1\pm x)^{\frac{1}{2}}=1\pm\frac{1}{2}x-\frac{1\cdot1}{2\cdot4}x^2\pm\frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3-$$
$$-\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4\pm\ldots \qquad 26\,(35)$$

3°. $$(1\pm x)^{-\frac{1}{2}}=1\mp\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2\mp\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+$$
$$+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4\mp\ldots \qquad 26\,(35)$$

2. Ортогональные и другие многочленные разложения.

1°. $$\frac{1}{\sqrt{1-2px+p^2}}=\sum_{k=0}^{\infty}p^kP_k(x)$$
$$[|p|<\min|x\pm\sqrt{x^2-1}|]; \qquad 26\,(396);\ 30\,(91);\ 27\,(489)$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p^{k+1}}P_k(x)$$
$$[|p|>\max|x\pm\sqrt{x^2-1}|]. \qquad 26\,(396);\ 66\,(70)$$

а) $$\frac{1}{\sqrt{1-px}}=\alpha\sum_{k=0}^{\infty} h^k P_k(x), \qquad 0\leqslant p<1,$$

$$h=\frac{1}{p}-\sqrt{\frac{1}{p^2}-1}, \quad \alpha=\frac{1}{1+h^2}, \quad |x|\leqslant 1.$$

б) $$\frac{1}{\sqrt{x}}=\beta\sum_{k=0}^{\infty}\varrho^k P_k(3-2x), \quad \varrho=3-2\sqrt{2}\approx 0{,}1715728,$$

$$\beta=\sqrt{\frac{2}{3\,[1+(3-\sqrt{2})^2]}}=\frac{1}{3}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}\approx 0{,}4355210,$$

$$1\leqslant x\leqslant 2.$$

2°. $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(4k+1)\left\{\frac{(2k-1)!!}{2^k\cdot k!}\right\}^2 P_{2k}(x)$$

$(|x|<1,\ (-1)!!\equiv 1)$. 26 (396); 66 (72); 61 (385)

3°. $$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(4k+3)\frac{(2k-1)!!\,(2k+1)!!}{2^{k+1}\cdot k!\,(k+1)!}P_{2k+1}(x)$$

$(|x|<1,\ (-1)!!\equiv 1)$. 26 (396); 61 (385)

4°. $$\sqrt{1-x^2}=\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}(4k+1)\frac{(2k-3)!!\,(2k-1)!!}{2^{2k+1}\cdot k!\,(k+1)!}P_{2k}(x)\right\}$$

$(|x|<1,\ (-1)!!\equiv 1)$. 26 (396); 61 (385)

5°. $y=\sqrt{x}$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$.

Приближения y_n находятся по формуле

$$y_n=\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{c_n^k}{2k-1}x^k}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{c_n^k}{2k-1}}, \qquad r_n=\frac{1}{n\pi} \qquad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

c_n^k—коэффициенты разложения многочлена Чебышева $T_n(x)$ по степеням x (см. стр. 175—176).

3. Многочленные приближения.

1°. Вычисление $\sqrt{A+Bi}$.

Если $A > B$, то

$$\sqrt{A+Bi}=\sqrt{A}\sqrt{1+\frac{B}{A}i};$$

если $A < B$, то

$$\sqrt{A+Bi}=\sqrt{B}\sqrt{\frac{A}{B}+i},$$

после чего задача сводится к вычислению следующих величин:

$$x=\frac{B}{A},\quad y=\sqrt{1+ix}\qquad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

$$x=\frac{A}{B},\quad y=\sqrt{i+x}\qquad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

для которых приводятся приближения:

$$\sqrt{1+ix}=1+0{,}0184x+0{,}0810x^2+i\,(0{,}5201x-0{,}0653x^2);$$
$$=1+x\,(0{,}0184+0{,}0810x)\qquad (r=0{,}002)+$$
$$+ix\,(0{,}5201-0{,}0653x)\qquad (ri=0{,}002i);$$

$$\sqrt{1+ix}=1-0{,}00316x+0{,}14237x^2-0{,}04079x^3$$
$$(r=0{,}0002)+ix\,(0{,}50637-0{,}03108x-0{,}02020x^2)$$
$$(ri=0{,}0002i);$$

$$\sqrt{i+x}=0{,}7071+x\,(0{,}3807+0{,}0111x)+i\,[0{,}7071-$$
$$-x\,(0{,}3548-0{,}1035x)];$$

$$\sqrt{-1+ix}=x\,(0{,}5201-0{,}0653x)+i\,[1+x\,(0{,}0184+$$
$$+0{,}0810x)];$$

$$\sqrt{i-x}=0{,}7071-x\,(0{,}3548-0{,}1035x)+i\,[0{,}7071+$$
$$+x\,(0{,}3807+0{,}0111x)].\qquad 17\,(490-493)$$

2°. $y=\sqrt{x}$.

Число x представляется как сумма двух чисел A_i^2 и B^2; A_i^2 — известный квадрат, а $B^2 \leqslant A_i^2$.

Обозначения: $\frac{B^2}{A_2^i}=k$, y^* — аппроксимация y.

а) $y^*=A\,(1{,}0075+0{,}4173k)$, $\varepsilon=7{,}5\cdot 10^{-3}$.

б) $y^*=A\,(1{,}000625+0{,}485025k-0{,}07232k^2)$, $\varepsilon=6{,}4\cdot 10^{-4}$.

4. Разложения в цепные дроби.

1°. $$(1+x)^{\nu}=\frac{1}{1-}\,\frac{\nu x}{1+x-}\,\frac{(1-\nu)x}{2-}\,\frac{(1+\nu)x}{3(1+x)-}\,\frac{(2-\nu)x}{2-}\cdots-\frac{(n-\nu)x}{2-}\,\frac{(n+\nu)x}{(2n+1)(1+x)-}\cdots \qquad 34\,(101)$$

2°. $$(1+x)^{\nu}=\frac{1}{1-}\,\frac{\nu x}{1+}\,\frac{(1+\nu)x}{2+}\,\frac{(1-\nu)x}{3+}\,\frac{(2+\nu)x}{2+}\,\frac{(2-\nu)x}{5+}\cdots+\frac{(n+\nu)x}{2+}\,\frac{(n-\nu)x}{2n+1+}\cdots. \qquad 34\,(101)$$

Дробь сходится на плоскости комплексного переменного x, разрезанной по действительной оси от $x=-\infty$ до $x=-1$.

3°. $$(1+x)^{\nu}=\frac{1}{1-}\,\frac{\nu x}{1+(1+\nu)x-}\,\frac{(1+\nu)x(1+x)}{2+(3+\nu)x-}\,\frac{2(2+\nu)x(1+x)}{3+(5+\nu)x-}\cdots-\frac{n(n+\nu)x(1+x)}{n+1+(2n+1+\nu)x-}\cdots \qquad 34\,(102)$$

4°. $$(1+x)^{\nu}=\frac{1}{1-}\,\frac{\nu x}{1+\nu x+}\,\frac{(1-\nu)x}{2-(1-\nu)x+}\,\frac{2(2-\nu)x}{3-(2-\nu)x+}\cdots+\frac{n(n-\nu)x}{n+1-(n-\nu)x+}\cdots \qquad 34\,(102)$$

5°. $$(1+x)^{\nu}=1+\frac{\nu x}{1+x-}\,\frac{(1+\nu)x}{2-}\,\frac{(1-\nu)x}{3(1+x)-}\,\frac{(2+\nu)x}{2-}\cdots-\frac{(n+\nu)x}{2-}\,\frac{(n-\nu)x}{(2n+1)(1+x)-}\cdots \qquad 34\,(102)$$

6°. $$(1+x)^{\nu}=1+\frac{\nu x}{1+}\,\frac{(1-\nu)x}{2+}\,\frac{(1+\nu)x}{3+}\,\frac{(2-\nu)x}{2+}\cdots+\frac{(n-\nu)x}{2+}\,\frac{(n+\nu)x}{2n+1+}\cdots \qquad 34\,(102)$$

Дробь сходится на плоскости комплексного переменного x, разрезанной по действительной оси от $x=-\infty$ до $x=-1$.

7°. $$(1+x)^{\nu}=1+\frac{\nu x}{1+(1-\nu)x-}\,\frac{(1-\nu)x(1+x)}{2+(3-\nu)x-}\cdots-\frac{n(n-\nu)x(1+x)}{n+1+(2n+1-\nu)x-}\cdots \qquad 34\,(102)$$

8°. $$(1+x)^{\nu}=1+\frac{\nu x}{1-\nu x+}\,\frac{(1+\nu)x}{2-(1+\nu)x+}\,\frac{2(2+\nu)x}{3-(2+\nu)x+}\cdots+\frac{n(n+\nu)x}{n+1-(n+\nu)x+}\cdots, \qquad 34\,(102)$$

9°. $$(1+x)^{\nu}=1+\frac{2\nu x}{2+(1-\nu)x-}\,\frac{(1-\nu^2)x^2}{3(2+x)-}\,\frac{(4-\nu^2)x^2}{5(2+x)-}\ldots$$
$$\ldots-\frac{(n^2-\nu^2)x^2}{(2n+1)(2+x)-}\ldots \qquad 34\,(104)$$

10°. $$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\nu}=1+\frac{2\nu}{x-\nu+}\,\frac{\nu^2-1}{3x+}\,\frac{\nu^2-4}{5x+}\ldots$$
$$\ldots+\frac{\nu^2-n^2}{(2n+1)x+}\ldots \qquad 34\,(106)$$

11°. Пусть $\sqrt{x}\approx a$; тогда
$$\sqrt{x}=a+\frac{x-a^2}{2a+}\,\frac{x-a^2}{2a+}\ldots$$

Дробь сходится на плоскости комплексного переменного x, кроме части действительной оси, удовлетворяющей неравенству $-\infty<x\leqslant 0$. В частности, при $a=1$:
$$\sqrt{x}=1+\frac{x-1}{2+}\,\frac{x-1}{2+}\,\frac{x-1}{2+}\,\frac{x-1}{2+}\ldots \qquad 34\,(108)$$
$$\frac{1}{1}\quad \frac{x+1}{2}\quad \frac{3x+1}{x+3}\quad \frac{x^2+6x+1}{4x+4}\quad \frac{5x^2+10x+1}{x^2+10x+5}$$

12°. Серия рациональных приближений.

а) $$x^n\approx\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{m}\frac{C_m^{\nu}C_n^{\nu}}{C_{m+k}^{\nu}}(x-1)^{\nu}}{\sum\limits_{\nu=0}^{k}(-1)^{\nu}\frac{C_k^{\nu}C_n^{\nu}}{C_{m+k}^{\nu}}\frac{(x-1)^{\nu}}{x^{\nu}}}$$ (n — любое действительное число). 1 (310)

При $m=k$ это равенство примет вид

б) $$x^n\approx\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{k}\frac{C_k^{\nu}C_n^{\nu}}{C_{2k}^{\nu}}(x-1)^{\nu}}{\sum\limits_{\nu=0}^{k}(-1)^{\nu}\frac{C_k^{\nu}C_n^{\nu}}{C_{2k}^{\nu}}\frac{(x-1)^{\nu}}{x^{\nu}}}.$$

5. Рациональные приближения.

1°. $\sqrt{x}\approx\frac{1+4x}{4+x}$ $(0{,}1\leqslant x\leqslant 10)$, относительная ошибка менее $\frac{1}{12}$. 48 (68)

2°. $\sqrt{x} \approx \frac{A+yB}{A-yB}, \quad y=\frac{1}{2}\frac{(x-1)}{(x+1)} \qquad (0{,}1 \leqslant x \leqslant 10{,}0),$

$$A=\sum_{k=0}^{3}(-1)^k a_{2k}y^{2k}, \quad B=\sum_{k=0}^{3}(-1)^k b_{2k}y^{2k},$$

$$\begin{aligned} a_0&=1, & b_0&=1,\\ a_2&=6, & b_2&=5,\\ a_4&=10, & b_4&=6,\\ a_6&=4, & b_6&=1. \end{aligned}$$

60 (85)

3°. Применение «рациональных аппроксимаций Падэ». Приводятся разные рациональные приближения функции $\sqrt{x}$ на разных интервалах. Эти аппроксимации могут быть уточнены с помощью итерационного процесса Герона (см. п. 6, 1°) при $n=2$ или общей формулы Ньютона (см. п. 6, 6°) при $n>2$. Выбор интервалов определяется системой счисления (двоичная или десятичная).

а) *Извлечение квадратного корня (при двоичной системе).*

$N=2^{2m}x, \quad 0{,}25 < x \leqslant 1, \quad \sqrt{N}=2^m\cdot\sqrt{x} \quad$ (m — целое число).

Интервал (0,25; 1) подразделяется на два полуинтервала: $0{,}25 < x \leqslant 0{,}5$ и $0{,}5 < x \leqslant 1$;

$$\sqrt{x} \approx y_0 = c_{10} - \frac{c_{11}}{x+c_{12}}.$$

	$0{,}25 < x \leqslant 0{,}5$	$0{,}5 < x \leqslant 1$
c_{10}	1,792 843	2,535 463
c_{11}	1,707 469	4,829 452
c_{12}	1,071 429	2,142 858

57 (151)

Начальное приближение $y_0=c_{10}-c_{11}(x+c_{12})^{-1}$.

При $0{,}25 < x \leqslant 0{,}5$ имеем $\varepsilon_0=1{,}4\cdot10^{-3}$. Далее применяется метод Герона с начальным приближением y_0. Две итерации дают $\varepsilon_2 \leqslant \frac{1}{2}\cdot10^{-12}$.

$$\sqrt{x} \approx y_0 = c_{20} - \frac{c_{21}}{x+c_{22}-\frac{c_{23}}{x+c_{24}}}.$$

	$0{,}25 < x \leqslant 0{,}5$	$0{,}5 < x < 1$
c_{20}	$5\left(\frac{5}{14}\right)^{\frac{1}{2}}$	$5\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$
c_{21}	$\frac{20c_{20}}{7}$	$\frac{40\sqrt{2}}{7}$
c_{22}	$\frac{47}{14}$	$\frac{47}{7}$
c_{23}	$\frac{4}{49}$	$\frac{16}{49}$
c_{24}	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{7}$

57 (151)

При $0{,}25 < x \leqslant 0{,}5$ имеем $\varepsilon_0 = 10^{-5}$. Далее применяется метод Герона с начальным приближением y_0. Применение одной итерации дает $\varepsilon_1 \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10^{-10}$.

б) *Квадратный корень (при десятичной системе)*

$$N = 10^{2m} \cdot x, \quad 10^{-2} < x \leqslant 1.$$

Интервал $(10^{-2}, 1)$ подразделяется на четыре подынтервала

$$(10^{-2}r^{k-1}, 10^{-2}r^k), \qquad k = 1, 2, 3, 4; \quad r = 10^{\frac{1}{2}}.$$

$$\sqrt{x} \approx y_0 = d_0 - \frac{d_1}{x + d_2 - \frac{d_3}{x + d_4}} \qquad (1 < 100x \leqslant r) \tag{α}$$

при $k = 1$ (первый подынтервал)

d_0	0,674 055	d_3	0,000 211
d_1	0,098 002	d_4	0,010 904
d_2	0,170 835		

57 (151)

$\varepsilon_0 = 1{,}7 \cdot 10^{-5}$. Далее применяется метод Герона с начальным приближением y_0. Выполнение одной итерации обеспечивает получение девяти точных значащих цифр. Выполнение двух итераций дает восемнадцать точных цифр.

При переходе к интервалу $(10^{-2}r^{k-1}, 10^{-2}r^k)$ для $k = 2, 3, 4$ в формуле (α) коэффициенты d_0, d_1, d_2, d_3, d_4 заменяются соответственно на $d_0 r^{\frac{k}{2}}$, $d_1 r^{\frac{3k}{2}}$, $d_2 r^k$, $d_3 r^{2k}$, $d_4 r^k$.

в) *Кубичный корень (при двоичной системе).*

$$N=2^{3m}\cdot x, \quad N^{\frac{1}{3}}=2^m\cdot x^{\frac{1}{3}} \quad 2^{-3}<x<1.$$

Интервал $(2^{-3},\ 1)$ подразделяется на три подынтервала:

$$(2^{-3},\ 2^{-2}),\ \left(2^{-2},\ \frac{1}{2}\right) \text{ и } \left(\frac{1}{2},\ 1\right).$$

$$\sqrt[3]{x}\approx y_0=a_0-\frac{a_1}{x+b_1}$$

	$2^{-3}<x\leqslant 2^{-2}$	$2^{-2}<x\leqslant 2^{-1}$	$2^{-1}<x<1$
a_0	1,126 25	1,418 986	1,787 81
a_1	0,301 67	0,760 160 7	1,915 48
b_1	0,357 14	0,714 28	1,428 56

57 (152)

$\varepsilon_0=1{,}2\cdot 10^{-3}$ при $2^{-3}<x\leqslant 2^{-2}$. Одна дополнительная итерация по методу Ньютона (п. 6, 6°) дает первые восемь точных значащих цифр.

$$\sqrt[3]{x}\approx y_0=a_0-\frac{a_1}{x+b_1}-\frac{a_2}{x+b_2}$$

	$2^{-3}<x\leqslant 2^{-2}$	$2^{-2}<x\leqslant 2^{-1}$	$2^{-1}<x<1$
a_0	1,576 745	1,986 574	2,502 926
a_1	1,267 028	3,192 710	8,045 125
b_1	1,153 061	2,306 122	4,612 244
a_2	0,022 490 6	0,089 962 4	0,359 849 6
b_2	0,096 938 8	0,193 877 6	0,387 755 2

57 (152)

$\varepsilon_0=7{,}5\cdot 10^{-6}$ при $2^{-3}\leqslant x\leqslant 2^{-2}$. Первые четыре точных значащих цифры получаются при помощи только двух делений. Одна дополнительная итерация по методу Ньютона увеличивает число точных цифр до пятнадцати.

6. Итерационные процессы. 1°. Итерационная формула Герона (частный случай формулы Ньютона) для извлечения квадратного корня $y=\sqrt{x}$:

$$y_{i+1}=\frac{1}{2}\left(y_i+\frac{x}{y_i}\right) \qquad (i=0,\ 1,\ \ldots).$$

Справедливо соотношение

$$\frac{y_i-\sqrt{x}}{y_i+\sqrt{x}}=\left(\frac{y_0-\sqrt{x}}{y_0+\sqrt{x}}\right)^{2^i}$$

При $\frac{1}{2}\leqslant x<1$ наилучшее линейное начальное приближение

$$y_0=\frac{1}{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{2}}}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx 0,5903\,x+0,4173.$$

При указанном линейном начальном приближении две итерации дают $r=2^{-31}$.

При $1\leqslant x\leqslant 2$

$$\left|\frac{r_{i+1}(x)}{2}\right|<\left(\frac{r_0(x)}{2}\right)^{2^{i+1}},$$

$$\varepsilon_i(x)=y_i x^{-\frac{1}{2}}-1,\qquad |\varepsilon_{i+1}|\approx\frac{1}{2}\varepsilon_i^2.$$

19 (17); 18 (94); 5 (227); 57 (150)

Дополнение к 1°. Ниже приводятся таблицы коэффициентов a и b для начальных значений $y_0=ax+b$ при вычислении $y=\sqrt{x}$ на интервале (0,01; 1) (речь идет о счете в десятичной системе) по методу Герона; коэффициенты подбирались по-разному для разных подынтервалов, с тем чтобы вторая итерация y_2 давала значение $\sqrt{x}$ соответственно с 8, 10, 12 десятичными знаками (при вычислении y_0 можно брать значение x лишь с тремя десятичными знаками).

8 цифр			10 цифр		
интервал	a	b	интервал	a	b
0,01—0,02	4,1	0,060	0,01—0,02	4,2	0,0585
0,02—0,03	3,2	0,078	0,02—0,03	3,1	0,0803
0,03—0,08	2,2	0,110	0,03—0,05	2,5	0,0991
0,08—0,18	1,4	0,174	0,05—0,08	2,0	0,1240
0,18—0,30	1,0	0,247	0,08—0,13	1,6	0,1545
0,30—0,60	0,8	0,304	0,13—0,23	1,2	0,2060
0,60—1,0	0,6	0,409	0,23—0,39	0,9	0,2749
			0,39—0,60	0,7	0,3550
			0,60—0,84	0,6	0,4148
			0,84—1,0	0,5	0,5005

12 цифр			12 цифр		
интервал	a	b	интервал	a	b
0,010—0,014	4,58	0,05439	0,145—0,195	1,21	0,20596
0,014—0,020	3,84	0,06482	0,195—0,260	1,05	0,23745
0,020—0,028	3,23	0,07712	0,260—0,350	0,91	0,27395
0,028—0,040	2,72	0,09153	0,350—0,470	0,78	0,31953
0,040—0,056	2,29	0,10876	0,470—0,630	0,68	0,36649
0,056—0,076	1,95	0,12781	0,630—0,820	0,59	0,42301
0,076—0,105	1,66	0,15004	0,820—1,00	0,52	0,48005
0,105—0,145	1,42	0,17548			

2°. Итерационная формула без деления для вычисления $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ (и $\sqrt{x}=xy$):

$$y_{i+1}=\frac{3}{2}y_i-\frac{1}{2}xy_i^3 \qquad (i=0,\ 1,\ \ldots),$$

$$\varepsilon_{i+1}(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{x}\,\varepsilon_i^2(x)\,(3+\varepsilon_i(x)\sqrt{x}).$$

При $\frac{1}{2}\leqslant x<1$ наилучшее постоянное начальное приближение

$$y_0=2(2-\sqrt{2})\approx 1{,}1715729, \quad \varepsilon_0<0{,}172;$$

наилучшее линейное начальное приближение

$$y_0=\frac{2}{(3+\sqrt{2})\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{6}}\right)-1}\cdot\left(\frac{3+\sqrt{2}}{2}-x\right)\approx$$

$$\approx -0{,}80999\,x+1{,}78773, \quad \varepsilon_0<0{,}022. \qquad 18\,(96)$$

3°. Итерационная формула $\left(\text{требуется нахождение лишь одной обратной величины } \frac{1}{2x}\right)$ для вычисления $\sqrt{x}$:

$$y_{i+1}=y_i\left(\frac{3}{2}-\frac{y_i^2}{2x}\right).$$

Начальное приближение (при $x=2^n\cdot x_1$):

$$y_0=2^{E\left(\frac{n}{2}\right)}. \qquad 5\,(230);\ 20\,(135)$$

4°. $y=\sqrt{x}$,

$$y_{i+1}=\frac{y_i\,(y_i^2+3x)}{3y_i^2+x}.$$

5°. $y=\sqrt{x}$. Формула двойной итерации (без деления):

$$y_{i+1}=y_i-\frac{1}{2}y_i z_i, \qquad z_{i+1}=\frac{1}{4}z_i^2(z_i-3),$$

где $y_0=x,\ z_0=x-1 \qquad (\lim\limits_{i\to\infty} z_i=0)$. 5(230)

6°. Правило Ньютона: $y=\sqrt[n]{x}$,

$$y_{i+1}=\frac{1}{n}\left[(n-1)y_i+\frac{x}{y_i^{n-1}}\right]. \qquad 12(180)$$

7°. Обобщенный метод Ньютона (для значений n порядка десяти и больше): $y=\sqrt[n]{x}$,

$$y_{i+1}=\frac{(n-1)\,y_i^n+(n+1)\,x}{(n+1)\,y_i^n+(n-1)\,x}\,y_i. \qquad 12(181)$$

8°. $y=\sqrt[n]{x}$. Производится замена переменного $z=10^k\cdot y$, k — целое (положительное или отрицательное) число, после чего задача приводится к нахождению $z=\sqrt[n]{X}$, где $0<X<1$. При замене следует стремиться к тому, чтобы X было по возможности ближе к единице. Затем вычисляется число $l=\frac{1}{n}$ с относительной ошибкой $\varepsilon\leqslant 0,1\,X$.

Итерация (не содержащая деления):

$$z_{i+1}=z_i+l\,(X-z_i^n) \quad (X\leqslant z_0\leqslant 1). \qquad 12(182)$$

9°. $y=\sqrt[n]{x}$ (итерации с квадратичной сходимостью):

$$y_{i+1}=y_i+l\,(y_i-my_i^{n+1}),$$

где $l=\frac{1}{n}$, $m=\frac{1}{x}$. 12(184)

В отличие от метода 8° значения l и m нужно вычислять с большой точностью.

10°. Итерационная формула для извлечения кубичного корня $y=\sqrt[3]{x}$:

$$y_{i+1}=\frac{1}{2}y_i+\frac{x+\frac{1}{2}x}{2y_i^2+xy_i^{-1}},$$

$$|\varepsilon_{j+1}|\leqslant\frac{2|\varepsilon_j|^3}{3}. \qquad 57\,(150)$$

11°. Итерационная формула для извлечения корня пятой степени $y=\sqrt[5]{x}$:

$$y_{i+1}=y_i\left[2\left(y_i^4+\frac{x}{y_i}\right)+\frac{x}{y_i}\right]\left[2\left(y_i^4+\frac{x}{y_i}\right)+y_i^4\right]^{-1}$$

$$|\varepsilon_{j+1}|\leqslant 2\cdot|\varepsilon_j|^3. \qquad 57\,(152)$$

12°. $\sqrt{a^2+x}=a\left(1+\frac{x}{2a^2}\right)\left(1+\frac{x'}{2a'^2}\right)\left(1+\frac{x''}{2a''^2}\right)\ldots,$

где

$x^{(n)}=-[x^{(n-1)}]^2,\quad a^{(n)}=2[a^{(n-1)}]^2+x^{(n-1)}.$ 33 (10); 59 (304, 354); 68 (455)

при этом

$$\frac{2a(a^2+x)}{2a^2+x}<\sqrt{a^2+x}<\frac{2a^2+x}{2a};$$

$$\frac{2a(a^2+x)}{2a^2+x}<\sqrt{a^2+x}<\frac{2a^2+x}{4a}+a\cdot\frac{a^2+x}{2a^2+x}. \qquad 33\,(10)$$

7. Разные формулы. Формулы Понселе. Исторически первыми наилучшими приближениями для случая линейных функций были так называемые формулы Понселе, которые мы здесь приводим.

1°. $\sqrt{a^2+b^2}\approx\alpha a+\beta b,$

$|a|>|b| \qquad (kb\leqslant a\leqslant\infty\cdot b,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ldots);$

$$\alpha=\frac{2}{1+\sqrt{2(1+k^2)-2k\sqrt{1+k^2}}},$$

$$\beta=\frac{2(\sqrt{1+k^2}-k)}{1+\sqrt{2(1+k^2)-2k\sqrt{1+k^2}}},$$

$\bar{\varepsilon}=1-\alpha.$ 70; 71 (318—321); 72 (279)

Ниже приведена таблица численных значений коэффициентов линейной функции $\alpha a+\beta b$ и пределы ошибок.

	k	α	β	$\bar{\varepsilon}=1-\alpha$
a и b любые, причем	0	0,82840	0,82840	0,17160 или $\frac{1}{6}$
$a>b$	1	0,96046	0,39783	0,03954 или $\frac{1}{25}$
$a>2b$	2	0,98592	0,23270	0,01408 или $\frac{1}{71}$
$a>3b$	3	0,99350	0,16123	0,00650 или $\frac{1}{154}$
$a>4b$	4	0,99625	0,12260	0,00375 или $\frac{1}{266}$
$a>5b$	5	0,99757	0,09878	0,00243 или $\frac{1}{417}$
$a>6b$	6	0,99826	0,08261	0,00174 или $\frac{1}{589}$
$a>7b$	7	0,99875	0,07098	0,00125 или $\frac{1}{800}$
$a>8b$	8	0,99905	0,06220	0,00095 или $\frac{1}{1049}$
$a>9b$	9	0,99930	0,05535	0,00070 или $\frac{1}{1428}$
$a>10b$	10	0,99935	0,04984	0,00065 или $\frac{1}{1538}$

70; 71 (323); 72 (280)

2°. а) $\sqrt{a^2-b^2}\approx 6{,}097a-6{,}02b \qquad (1{,}01b\leqslant a\leqslant 1{,}02\,b),$

$$\varepsilon=0{,}0309 \quad \text{или} \quad \frac{1}{32}.$$

б) $\sqrt{a^2-b^2}\approx 1{,}1319a-0{,}72636b \qquad (0\leqslant b\leqslant 0{,}91a),$

$$\varepsilon=0{,}1319 \quad \text{или} \quad \frac{1}{7}.$$

в) $\sqrt{a^2-b^2}\approx 1{,}018623a-0{,}272944b \quad \left(0\leqslant b\leqslant\frac{a}{2}, \text{ или } 2b\leqslant a<\infty\right),$

$$\varepsilon=0{,}0186 \quad \text{или} \quad \frac{1}{53}.$$

70; 71 (334, 335); 72 (290)

3°. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\approx\alpha_1 a+\beta_1\sqrt{b^2+c^2}$ (1-я операция);

$=\alpha_1 a+\beta_1(\alpha_2 b+\beta_2 c)$ (2-я операция);

$=\alpha_1 a+\beta_1\alpha_2 b+\beta_1\beta_2 c;$

α_1, α_2, β_1, β_2 определяются, как указано в 4°; ε_1 и ε_2 — пределы относительных ошибок, совершаемых соответственно при выполнении первой и второй операций;

$$r = \sqrt{a^2+b^2+c^2}\left(\varepsilon_1+\beta_1\varepsilon_2\sqrt{\frac{b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}}\right) < (\varepsilon_1+\beta_1\varepsilon_2)\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

В частности, при $a^2>b^2+c^2$ и $b^2>c^2$ имеем: $\alpha_1=\alpha_2=0,96$, $\beta_1=\beta_2=0,4$; $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0,03954$; $r<\sqrt{a^2+b^2+c^2}\left(\varepsilon_1+\frac{1}{2}\sqrt{2\beta_1\varepsilon_1}\right)=$

$$=0,0507\sqrt{a^2+b^2+c^2}. \qquad 70;\ 71\ (335);\ 72\ (291)$$

4°. Формулы Хорвата:

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} \approx \alpha a+\beta b+\gamma c.$$

а) Если не делать никаких предположений относительно взаимного соотношения численных значений a, b и c, то

$$\alpha=\beta=\gamma=0,732, \quad \varepsilon=0,268,$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\approx 0,732\,(a+b+c), \quad \varepsilon=0,27. \qquad 51\ (68)$$

б) При $|a|>|b|>|c|$

$$\alpha=0,939, \quad \beta=0,389, \quad \gamma=0,297,$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\approx 0,939a+0,389b+0,297c, \qquad \varepsilon=0,06. \qquad 51\ (69)$$

ГЛАВА II

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

§ 1. Показательная функция

1. Общие сведения. 1°. Показательная функция a^x ($a>0$, $a\neq 1$) определена на всей числовой оси, непрерывна, выпукла и является возрастающей при $a>1$ и убывающей при $a<1$. Если $a>1$, то a^x растет быстрее любой степенной функции x^α:

$$\lim_{x\to+\infty} a^x x^{-\alpha}=\infty.$$

Показательная функция a^x с произвольным основанием $a>0$ связана с показательной функцией e^x с основанием $e=2{,}718281828459045\ldots$ тождеством

$$a^x=e^{x\ln a}.$$

Основные соотношения:

$$a^x\cdot a^y=a^{x+y},\quad \frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\quad (a^x)^y=a^{xy},\quad \sqrt[y]{a^x}=a^{\frac{x}{y}},$$

где x и y могут принимать любые числовые значения.

Показательные функции, в которых основаниями служат разные числа, можно преобразовать к функциям с общим основанием, пользуясь тождеством

$$b=a^{\log_a b}.$$

Каждое число x представимо в виде

$$x=n+y,\quad \text{где}\quad n=E(x),\quad y=\{x\},\quad 0\leqslant y<1.$$

Отсюда

$$a^x=a^n\cdot a^y.$$

Следовательно, вычисление показательной функции сводится к ее вычислению для аргумента y из интервала (0, 1).

Далее,

$$a^y = (a^{y\cdot 2^{-m}})^{2^m} = \underbrace{((\ldots(a^{y\cdot 2^{-m}})^2)^2\ldots)^2}_{m\text{ раз}}.$$

Таким образом, вычисление показательной функции сводится к ее вычислению для аргумента y из интервала $\left(0, \frac{1}{2^m}\right)$ при любом положительном m.

2°. Показательная функция как предел степенной:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{h\to 0}(1+hx)^{\frac{1}{h}}.$$

Стремление к пределу равномерное; при этом производная степенной функции $\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]' = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}$ при $n\longrightarrow\infty$ также стремится к e^x: $(e^x)' = e^x$.

3°. Функция $y = Ce^{kx}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению «органического роста»

$$y' = ky.$$

Вообще, если λ — корень алгебраического уравнения n-й степени

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\lambda^k = 0, \tag{2.1}$$

то функция $y = Ce^{\lambda x}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0.$$

4°. Если λ есть решение уравнения (2.1) и $a = \lambda^{\frac{1}{h}}$, то функция $y = Ca^x$ есть решение разностного уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y(x+kh) = 0.$$

5°. Формула Эйлера дает определение показательной функции e^z во всей комплексной плоскости z (при $z = x+iy$):

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y).$$

При мнимых значениях аргумента z: $\pm 2\pi i$, $\pm\pi i$, $\pm\frac{\pi}{2}i$ функция e^z принимает значения

$$e^{\pm 2\pi i} = 1, \quad e^{\pm\pi i} = -1, \quad e^{\pm\frac{\pi}{2}i} = \pm i.$$

В комплексной области функция e^z периодическая с мнимым периодом $2\pi i$:

$$e^{z+n\cdot 2\pi i} = e^z.$$

2. Степенные разложения.

1°. $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. 26 (36)

2°. $a^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^k}{k!}$. 26 (36)

3°. $\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k} x^{2k}}{(2k)!}$ $(x < 2\pi)$. 26 (36); 32 (520)

4°. $e^{e^x} = e\left(1 + x + \frac{2x^2}{2!} + \frac{5x^3}{3!} + \frac{15x^4}{4!} + \ldots\right)$. 26 (36); 39 (126)

5°. $e^{\frac{p(x+x^{-1})}{2}} = I_0(p) + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^n + x^{-n}) I_n(p)$.

3. Ортогональные и другие многочленные разложения.

А. Разложения по многочленам Чебышева.

1°. $e^{ax} = I_0(a) + 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} I_k(a) \cdot T_k(x)$ $\quad (|x| \leqslant 1)$,

$$|r_{n-1}(a, x)| \leqslant \frac{2I_n(a)}{1 - \frac{(n+1)^{-1}\cdot a}{2}} \approx \frac{a^n}{2^{n-1} n!} \qquad (|x| \leqslant 1).$$

19 (6); 55 (110, 114)

2°. $e^x = e^{\frac{1}{2}}\left[I_0\left(\frac{1}{2}\right) + 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} I_k\left(\frac{1}{2}\right) T_k(2x-1)\right]$

$(0 \leqslant x \leqslant 1)$. 18 (101)

3°. $$2^x = 2^{\frac{1}{2}}\left[I_0\left(\frac{1}{2}\ln 2\right) + 2\sum_{k=1}^{\infty} I_k\left(\frac{1}{2}\ln 2\right) T_k(2x-1)\right]$$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$,

при $k > 4$ $\quad |r_{k-1}(x)| < \dfrac{3^{\frac{k}{2}+1}\cdot 10^{-k}}{k!}$. 18 (102); 19 (7)

k	$I_k\left(\frac{1}{2}\right)$	$I_k\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)$
0	1,063 483 370 74	1,030 254 491 81
1	0,257 894 305 39	0,175 901 603 92
2	0,031 906 149 18	0,015 165 005 18
3	0,002 645 111 97	0,000 873 781 81
4	0,000 164 805 55	0,000 037 797 02
5	0,000 008 223 17	0,000 001 308 64
6	0,000 000 342 12	0,000 000 037 77
7	0,000 000 012 21	0,000 000 000 93
8	0,000 000 000 38	0,000 000 000 02
9	0,000 000 000 01	

18 (102)

4°. $$e^x = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 = e^{\frac{1}{2}}\left[I_0\left(\frac{1}{4}\right) + 2\sum_{k=1}^{\infty} I_k\left(\frac{1}{4}\right) T(4x-1)\right]^2 \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right).$$ 18 (102)

5°. $$2^x = 2^{\frac{1}{2}}\left[I_0\left(\frac{1}{4}\ln 2\right) + 2\sum_{k=1}^{\infty} I_k\left(\frac{1}{4}\ln 2\right) T(4x-1)\right]^2 \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right).$$ 18 (102)

k	$I_k\left(\frac{1}{4}\right)$	$I_k\left(\frac{1}{4}\ln 2\right)$
0	1,015 686 141 22	1,007 521 170 16
1	0,125 979 108 95	0,086 969 024 12
2	0,007 853 269 66	0,003 762 940 69
3	0,000 326 794 39	0,000 108 610 07
4	0,000 010 204 36	0,000 002 351 70
5	0,000 000 254 98	0,000 000 040 74
6	0,000 000 005 31	0,000 000 000 59
7	0,000 000 000 09	0,000 000 000 01

18 (102)

$$6^\circ.\quad 10^{\frac{x}{4}} = e^{\frac{x}{4M}} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_k(x) \qquad (|x| \leqslant 1),$$

$$a_k = 2I_k\left(\frac{1}{4M}\right),$$

$$r_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{1 - \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}}, \quad M = \lg e.$$

k	a_k	r_k
0	2,169 147 476 660 513 190 741 362	
1	0,599 821 658 383 255 642 328 086	
2	0,085 153 585 765 270 650 944 524	$88\cdot10^{-4}$
3	0,008 113 939 789 138 247 927 893	$63\cdot10^{-5}$
4	0,000 581 443 119 239 232 582 513	$36\cdot10^{-6}$
5	0,000 033 378 565 899 425 867 451	$18\cdot10^{-7}$
6	0,000 001 598 039 880 644 344 284	$69\cdot10^{-9}$
7	0,000 000 065 610 602 217 712 768	$25\cdot10^{-10}$
8	0,000 000 002 357 820 784 237 217	$79\cdot10^{-12}$
9	0,000 000 000 075 334 639 407 421	$23\cdot10^{-13}$
10	0,000 000 000 002 166 674 498 582	$59\cdot10^{-15}$
11	0,000 000 000 000 056 657 102 243	$15\cdot10^{-16}$
12	0,000 000 000 000 001 358 214 469	$32\cdot10^{-18}$
13	0,000 000 000 000 000 030 057 520	$64\cdot10^{-20}$
14	0,000 000 000 000 000 000 617 703	$13\cdot10^{-24}$
15	0,000 000 000 000 000 000 011 849	$23\cdot10^{-23}$
16	0,000 000 000 000 000 000 000 213	$<5\cdot10^{-24}$

78(88)

$$7^\circ.\quad e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(2x-1) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

a_0	0,645 035 270	a_4	0,000 199 919
a_1	—0,312 841 606	a_5	—0,000 009 975
a_2	0,038 704 116	a_6	0,000 000 415
a_3	—0,003 208 683	a_7	—0,000 000 015

47 (145)

Б. Разложение по многочленам Лежандра.

8°. $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x) \qquad (|x|<1).$

a_0	1,175 201 193 644	a_6	0,000 099 454 339 113
a_1	1,103 638 323 514	a_7	0,000 007 620 541 309
a_2	0,357 814 350 647	a_8	0,000 000 506 471 974
a_3	0,070 455 633 668	a_9	0,000 000 029 718 142
a_4	0,009 965 128 149	a_{10}	0,000 000 001 560 868
a_5	0,001 099 586 127	a_{11}	0,000 000 000 074 628

9°. $y = e^x = \lim_{n\to\infty} y_n(x), \quad y_n = \dfrac{\sum_{k=0}^{n} c_n^k\, k!\, S_k(x)}{\sum_{k=0}^{n} c_n^k\, k!}, \qquad$ 17 (468)

где $S_k(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!}$ представляет последовательные «частичные суммы» ряда Тейлора, c_n^k — см. [17], стр. 449, 503.

Последовательные приближения в интервале (0,1):

$$y_0 = 1,$$

$$y_1 = \frac{1+2x}{1},$$

$$y_2 = \frac{9+8x+8x^2}{9},$$

$$y_3 = \frac{113+114x+48x^2+32x^3}{113},$$

$$y_4 = \frac{1825+1824x+928x^2+256x^3+128x^4}{1825}.$$

y_n сходится к e^x быстрее сумм ряда Тейлора.

10°. $y = e^x, \quad y_n(x) = \dfrac{\sum_{k=0}^{n} \bar{c}_n^k\, k!\, S_k(x)}{(-1)^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \bar{c}_n^k\, k!}, \qquad$ 17 (469) где

$$S_k(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!}, \qquad 17\,(468)$$

$$\bar{c}_n^k = 2^{2k-1}\left[2\binom{n+k}{n-k} - \binom{n+k-1}{n-k}\right](-1)^{k+n}, \qquad 17\,(450)$$

$\bar{c}_n^k$ — коэффициенты разложения многочлена Чебышева $T_n(2x-1)$ по степеням x — см. стр. 176—178.

Последовательные приближения в интервале $(0,1)$:

$$y_1 = \frac{8+16x}{9},$$

$$y_2 = \frac{114+96x+96x^2}{113} \qquad (r = 0{,}01),$$

$$y_3 = \frac{1824+1856x+768x^2+512x^3}{1825} \qquad (r = 0{,}0006),$$

$$y_4 = \frac{36690+36640x+18720x^2+5120x^3+2560x^4}{36689}$$

Максимальная ошибка не превосходит обратной величины знаменателя.

4. Многочленные приближения.

1°. Приближения для e^x.

а) $e^x \approx \sum\limits_{k=0}^{4} a_k x^k \quad \left(-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 0\right), \quad r = 5\cdot 10^{-7}$.

a_0	0,999 999 6	a_3	0,162 842 7
a_1	0,999 958 6	a_4	0,032 534 0
a_2	0,499 330 9		

б) $e^x \approx \sum\limits_{k=0}^{6} a_k x^k \quad (-1 \leqslant x \leqslant 0), \quad r = 2{,}4\cdot 10^{-8}$.

a_0	0,999 999 98	a_4	0,041 223 25
a_1	0,999 998 45	a_5	0,076 543 11
a_2	0,499 975 05	a_6	0,000 849 01
a_3	0,166 515 09		

в) $e^x \approx \sum_{k=0}^{7} a_k x^k \quad (|x| \leqslant 1), \quad r = 2 \cdot 10^{-7}$.

a_0	0,999 999 8	a_4	0,041 635 0
a_1	1,000 000 0	a_5	0,008 329 8
a_2	0,500 006 3	a_6	0,001 439 3
a_3	0,166 667 4	a_7	0,000 204 0

г) $\frac{1}{4} e^x \approx \sum_{k=0}^{10} a_k x^k \quad (|x| < 1)$.

a_0	0,250 000 000	a_6	0,000 347 223
a_1	0,250 000 000	a_7	0,000 049 587
a_2	0,125 000 000	a_8	0,000 006 199
a_3	0,041 666 666	a_9	0,000 000 706
a_4	0,010 416 666	a_{10}	0,000 000 070
a_5	0,002 083 340		

3(282)

2°. Приближения для 2^x при $0 < x < 1$.

а) $2^x \approx \sum_{k=0}^{7} a_k x^k \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$.

a_0	0,999 999 999 93	a_4	0,009 613 530 02
a_1	0,693 147 187 87	a_5	0,001 342 985 66
a_2	0,240 226 356 70	a_6	0,000 142 992 74
a_3	0,055 505 295 42	a_7	0,000 021 651 59

7(5,6)

б) $2^x \approx \sum_{k=0}^{8} a_k x^k \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$.

a_0	1,000 000 000 040	a_5	0,001 301 780 490 28
a_1	0,693 147 151 142	a_6	0,000 191 629 879 96
a_2	0,240 227 029 850	a_7	0,000 008 390 778 29
a_3	0,055 500 205 505 4	a_8	0,000 007 561 668 20
a_4	0,009 633 032 340 04		

в) $2^x = \{[(\sum_{k=0}^{4} a_k x^k)^2]^2\}^2 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \quad r = O(10^{-9})$.

a_0	1	a_3	0,000 108 419 178 11
a_1	0,086 643 396 773	a_4	0,000 023 481 760 517
a_2	0,003 753 591 712		

3°. Приближения для 10^x. Формулы а) — г) представляют серию наилучших приближений 10^x квадратами многочленов степени 4—7 на (0, 1) (см. [49], стр. 141—144).

а) $10^x \approx [\sum_{k=0}^{4} a_k x^k]^2 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1), \quad \varepsilon = 8 \cdot 10^{-5}$.

a_0	1	a_3	0,208 003 0
a_1	1,149 919 6	a_4	0,126 808 9
a_2	0,677 432 3		

б) $10^x \approx [\sum_{k=0}^{5} a_k x^k]^2 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1), \quad \varepsilon = 3{,}5 \cdot 10^{-6}$.

a_0	1	a_3	0,261 306 50
a_1	1,151 384 24	a_4	0,058 906 81
a_2	0,661 308 51	a_5	0,029 366 22

в) $10^x \approx [\sum_{k=0}^{6} a_k x^k]^2 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1), \quad \varepsilon = 1{,}5 \cdot 10^{-7}$.

a_0	1	a_4	0,075 467 547
a_1	1,151 287 586	a_5	0,013 420 940
a_2	0,662 843 149	a_6	0,005 654 902
a_3	0,253 603 317		

г) $10^x \approx [\sum_{k=0}^{7} a_k x^k]^2 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1), \quad \varepsilon = 5 \cdot 10^{-9}$.

a_0	1	a_4	0,072 951 736 66
a_1	1,151 292 776 03	a_5	0,017 421 119 88
a_2	0,662 730 884 29	a_6	0,002 554 917 96
a_3	0,254 393 574 84	a_7	0,000 932 642 67

4°. Приближения для $10^{\frac{x}{4}}$. Формулы а) — о) представляют серию приближений $10^{\frac{x}{4}} = e^{\frac{x}{4M}}$ многочленами степени 2—15 ($|x| \leqslant 1$) (см. [78], стр. 89, 80) ($10^x = [(10^{\frac{x}{4}})^2]^2$).

а) $10^{\frac{x}{4}} \approx \sum_{k=0}^{2} a_k x^k, \quad r = 88 \cdot 10^{-4}.$

a_0	0,999 4
a_1	0,599 8
a_2	0,170 3

б) $10^{\frac{x}{4}} \approx \sum_{k=0}^{3} a_k x^k, \quad r = 61 \cdot 10^{-5}.$

a_0	0,999 42	a_2	0,170 31
a_1	0,575 48	a_3	0,032 46

в) $10^{\frac{x}{4}} \approx \sum_{k=0}^{4} a_k x^k, \quad r = 33 \cdot 10^{-6}.$

a_0	1,000 002	a_3	0,032 456
a_1	0,575 480	a_4	0,004 652
a_2	0,165 656		

г) $10^{\frac{x}{4}} \approx \sum_{k=0}^{5} a_k x^k, \quad r = 17 \cdot 10^{-7}.$

a_0	1,000 001 6	a_3	0,031 788 2
a_1	0,575 646 7	a_4	0,004 651 5
a_2	0,165 655 6	a_5	0,000 534 1

д) $10^{\frac{x}{4}} \approx \sum_{k=0}^{6} a_k x^k, \quad r = 68 \cdot 10^{-9}.$

a_0	0,999 999 998	a_4	0,004 574 839
a_1	0,575 646 732	a_5	0,000 534 057
a_2	0,165 684 391	a_6	0,000 051 137
a_3	0,031 788 188		

е) $10^{\frac{x}{4}} \approx \sum_{k=0}^{7} a_k x^k, \qquad r = 24 \cdot 10^{-10}.$

a_0	0,999 999 997 6	a_4	0,004 574 839 0
a_1	0,575 646 272 6	a_5	0,000 526 708 7
a_2	0,165 684 391 3	a_6	0,000 051 137 3
a_3	0,031 791 862 0	a_7	0,000 004 199 1

ж) $10^{\frac{x}{4}} \approx \sum_{k=0}^{8} a_k x^k, \qquad r = 77 \cdot 10^{-12}.$

a_0	1,000 000 000 002	a_5	0,000 526 708 667
a_1	0,575 646 272 571	a_6	0,000 050 533 674
a_2	0,165 684 315 844	a_7	0,000 004 199 079
a_3	0,031 791 862 032	a_8	0,000 000 301 801
a_4	0,004 575 216 291		

з) $10^{\frac{x}{4}} \approx \sum_{k=0}^{9} a_k x^k, \qquad r = 22 \cdot 10^{-13}.$

a_0	1,000 000 000 002 2	a_5	0,000 526 741 211 5
a_1	0,575 646 273 249 1	a_6	0,000 050 533 674 1
a_2	0,165 684 315 844 2	a_7	0,000 004 155 685 8
a_3	0,031 791 852 992 1	a_8	0,000 000 301 801 1
a_4	0,004 575 216 291 0	a_9	0,000 000 019 285 7

и) $10^{\frac{x}{4}} \approx \sum_{k=0}^{10} a_k x^k, \qquad r = 57 \cdot 10^{-15}.$

a_0	0,999 999 999 999 999	a_6	0,000 050 536 100 735
a_1	0,575 646 273 249 134	a_7	0,000 004 155 685 790
a_2	0,165 684 315 952 548	a_8	0,000 000 299 027 717
a_3	0,031 791 852 992 132	a_9	0,000 000 019 285 668
a_4	0,004 575 215 424 299	a_{10}	0,000 000 001 109 337
a_5	0,000 526 741 211 507		

к) $10^{\frac{x}{4}} \approx \sum_{k=0}^{11} a_k x^k, \qquad r = 15 \cdot 10^{-16}.$

a_0	0,999 999 999 999 998 6	a_6	0,000 050 536 100 735 3
a_1	0,575 646 273 248 511 0	a_7	0,000 004 155 845 336 0
a_2	0,165 684 315 952 547 7	a_8	0,000 000 299 027 717 0
a_3	0,031 791 853 004 596 5	a_9	0,000 000 019 126 121 3
a_4	0,004 575 215 424 298 6	a_{10}	0,000 000 001 109 337 3
a_5	0,000 526 741 141 705 1	a_{11}	0,000 000 000 058 016 9

л) $10^{\frac{x}{4}} \approx \sum_{k=0}^{12} a_k x^k, \qquad r = 30 \cdot 10^{-18}.$

a_0	1,000 000 000 000 000 001	a_7	0,000 004 155 845 336 035
a_1	0,575 646 273 248 511 030	a_8	0,000 000 299 037 105 003
a_2	0,165 684 315 952 449 877	a_9	0,000 000 019 126 121 288
a_3	0,031 791 853 004 596 500	a_{10}	0,000 000 001 100 992 474
a_4	0,004 575 215 425 439 511	a_{11}	0,000 000 000 058 016 873
a_5	0,000 526 741 141 705 104	a_{12}	0,000 000 000 002 781 623
a_6	0,000 050 536 095 867 452		

м) $10^{\frac{x}{4}} \approx \sum_{k=0}^{13} a_k x^k, \qquad r = 64 \cdot 10^{-20}.$

a_0	1,000 000 000 000 000 000 62	a_7	0,000 004 155 845 035 940 58
a_1	0,575 646 273 248 511 421 18	a_8	0,000 000 299 037 105 002 59
a_2	0,165 684 315 952 449 877 32	a_9	0,000 000 019 126 621 445 52
a_3	0,031 791 853 004 585 558 94	a_{10}	0,000 000 001 100 992 473 58
a_4	0,004 575 215 425 439 510 81	a_{11}	0,000 000 000 057 616 746 99
a_5	0,000 526 741 141 792 631 59	a_{12}	0,000 000 000 002 781 623 23
a_6	0,000 050 536 095 867 452 04	a_{13}	0,000 000 000 000 123 115 60

н) $10^{\frac{x}{4}} \approx \sum_{k=0}^{14} a_k x^k, \qquad r = 12 \cdot 10^{-21}.$

a_0	1	a_8	0,000 000 299 037 088 398 732
a_1	0,575 646 273 248 511 421 182	a_9	0,000 000 019 126 621 445 516
a_2	0,165 684 315 952 449 937 857	a_{10}	0,000 000 001 101 016 825 900
a_3	0,031 791 853 004 585 558 943	a_{11}	0,000 000 000 057 616 746 991
a_4	0,004 575 215 425 438 542 252	a_{12}	0,000 000 000 002 763 912 452
a_5	0,000 526 741 141 792 631 590	a_{13}	0,000 000 000 000 123 115 602
a_6	0,000 050 536 095 873 263 394	a_{14}	0,000 000 000 000 005 060 223
a_7	0,000 004 155 845 035 940 579		

о) $10^{\frac{x}{4}} \approx \sum_{k=0}^{15} a_k x^k, \qquad r = 21 \cdot 10^{-23}.$

a_0	0,999 999 999 999 999 999 999 79	a_8	0,000 000 299 037 087 398 731 90
a_1	0,575 646 273 248 511 421 004 73	a_9	0,000 000 019 126 620 611 346 69
a_2	0,165 684 315 952 449 937 857 34	a_{10}	0,000 000 001 101 016 825 899 52
a_3	0,031 791 853 004 585 565 578 66	a_{11}	0,000 000 000 057 617 838 994 43
a_4	0,004 575 215 425 438 542 252 05	a_{12}	0,000 000 000 002 763 912 452 10
a_5	0,000 526 741 141 792 559 927 18	a_{13}	0,000 000 000 000 122 387 599 36
a_6	0,000 050 536 095 873 263 394 30	a_{14}	0,000 000 000 000 005 060 222 98
a_7	0,000 004 155 845 036 281 830 46	a_{15}	0,000 000 000 000 000 194 134 02

5. Разложения в цепные дроби.

1°. $$e^x = \frac{1}{1} - \frac{x}{1} + \frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x}{2} - \frac{x}{5} + \ldots + \frac{x}{2} - \frac{x}{2n+1} + \ldots \qquad 34(111)$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{1-x} \quad \frac{2+x}{2-x} \quad \frac{6+2x}{6-4x+x^2} \quad \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2} \quad \frac{60+24x+3x^2}{60-36x+9x^2-x^3}$$

Дробь сходится на всей плоскости комплексного переменного x.

2°. $$e^x = \frac{1}{1} - \frac{x}{1+x} - \frac{x}{2+x} - \frac{2x}{3+x} - \ldots - \frac{nx}{n+1+x} - \ldots \qquad 34(111)$$

3°. $$e^x = 1 + \frac{x}{1} - \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{2} + \frac{x}{5} - \ldots - \frac{x}{2} + \frac{x}{2n+1} - \ldots \qquad 34\,(112)$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{1+x}{1} \quad \frac{2+x}{2-x} \quad \frac{6+4x+x^2}{6-2x} \quad \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2} \quad \frac{60+36x+9x^2+x^3}{60-24x+3x^2}$$

Дробь сходится на всей плоскости комплексного переменного x.

4°. $$e^x = 1 + \frac{x}{1-x} + \frac{x}{2-x} + \frac{2x}{3-x} + \ldots + \frac{nx}{n+1-x} + \ldots \qquad 34\,(112)$$

5°. $$e^x = 1 + \cfrac{\cfrac{2x}{2-x}}{\cfrac{1}{1}\cdot\cfrac{2+x}{2-x}} + \cfrac{\cfrac{x^2}{6}}{\cfrac{2+x}{2-x}\cdot\cfrac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}} + \cfrac{\cfrac{x^2}{10}}{\cfrac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}\cdot\cfrac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3}} +$$

$$+ \cfrac{\cfrac{x^2}{14}}{\cfrac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3}\cdot\cfrac{1680+840x+180x^2+20x^3+x^4}{1680-840x+180x^2-20x^3+x^4}} +$$

$$+ \cfrac{\cfrac{x^2}{18}}{\cfrac{1680+840x+180x^2+20x^3+x^4}{1680-840x+180x^2-20x^3+x^4}\cdot\cfrac{30240+15120x+3360x^2+420x^3+30x^4+x^5}{30240-15120x+3360x^2-420x^3+30x^4-x^5}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{x^2}{2(2n+1)} + \ldots \qquad 34(112)$$

6°. $$e^x = \frac{1}{1} - \frac{2x}{2+x} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^2}{10} + \ldots + \frac{x^2}{2(n+1)} + \ldots \qquad 34(113)$$

7°. $$e^x = 1 + \cfrac{x}{1 - \cfrac{x}{2} + F},$$

где

$$F = \frac{x^2/4\cdot 3}{1} + \frac{x^2/4\cdot 15}{1} + \frac{x^2/4\cdot 35}{1} + \ldots + \frac{x^2/4\cdot[4(n-1)^2-1]}{1} + \ldots$$

$$|r_{n-1}(x)| \leqslant \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{D_{n-1}D_n\prod\limits_{i=1}^{n}(4i^2-1)}, \qquad 65(264)$$

причем равенство имеет место только при $x=0$.

Эквивалентной формой для выражения F является

$$F = \frac{x^2/4\cdot 4}{3/4} + \frac{x^2/4\cdot 4\cdot 8}{5/8} + \frac{x^2/4\cdot 8\cdot 8}{7/8} + \frac{x^2/4\cdot 8\cdot 16}{9/16} + \ldots \qquad 65(265)$$

Количество членов, требуемых для получения точных двенадцати десятичных знаков,

x	F в форме 7°
0,1	4
1	6
10	17

8°. $$e^x = 1 + \cfrac{x}{1 - \cfrac{x}{2}} + \frac{x^2/4}{3} + \frac{x^2/4}{5} + \ldots + \frac{x^2/4}{2n-1} + \ldots$$

При $|x| \leqslant 1$ имеем $r_4 = 0{,}84\cdot 10^{-4}$, $r_5 = 0{,}33\cdot 10^{-7}$, $r_6 = 0{,}81\cdot 10^{-10}$. 64(194)

$$9^\circ.\ e^x = -1 + \frac{2}{1} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{10} + \frac{x^2}{14} + \frac{x^2}{18} + \ldots,$$

$$r_6 < 10^{-11} \quad \text{при} \quad 0 < x < 1. \qquad 20\ (134)$$

$$10^\circ.\ e^x = \frac{y+x}{y-x} \quad (|x| \leqslant 1),$$

где

$$y = 2 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{10} + \frac{x^2}{14} + \frac{x^2}{18} + \ldots, \qquad 20\ (249)$$

$$r_6 < 10^{-11}.$$

Серии рациональных приближений:

$$11^\circ.\ e^x \approx \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{m} \frac{C_m^\nu}{C_{m+k}^\nu} \frac{x^\nu}{\nu!}}{\sum\limits_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \frac{C_k^\nu}{C_{m+k}^\nu} \frac{x^\nu}{\nu!}}. \qquad \text{I}\ (310)$$

При $m = k$ получаем

$$12^\circ.\ e^x \approx$$

$$\approx \frac{2k(2k-1)\ldots(k+1) + C_k^1(2k-1)(2k-2)\ldots(k+1)x + \ldots + x^k}{2k(2k-1)\ldots(k+1) - C_k^1(2k-1)(2k-2)\ldots(k+1)x + \ldots + (-1)^k x^k}$$

I (310); 34 (152)

(C_n^k — биномиальные коэффициенты).

В этом разложении заключены все подходящие дроби разложения (см. п. 5,5°).

Другая запись:

$$e^x \approx \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} c_k^n x^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} c_k^n (-x)^k}, \qquad 17\ (422)$$

где $c_k^n = \frac{(2n-k)!}{(n-k)!\,k!}$. Численные значения коэффициентов c_k^n см. [17], стр. 516, табл. XV. Первые четыре аппроксимации

($n=1$, 2, 3, 4) имеют вид

$$\frac{2+x}{2-x} \qquad \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2} \qquad \frac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3},$$

$$\frac{1680+840x+180x^2+20x^3+x^4}{1680-840x+180x^2-20x^3+x^4}, \qquad r=1{,}1\cdot 10^{-7} \quad (|x|\leqslant 1).$$

13°. $e^x \approx \dfrac{P_m(x)}{P_m(-x)} \qquad (|x|\leqslant 2^{-k}\ln 2).$

Здесь

$$(2m)!\,P_m(x)=m!\sum_{k=0}^{m}(2m-k)!\,\frac{x^k}{[k!\,(m-k)!]},$$

$$|\varepsilon_n(x)|<(2n+1)^{-1}\left(\frac{n!}{(2n)!}\right)^2|x|^{2n+1}e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8(2n+3)}}. \quad 55\ (111)$$

14°. $e^x=\dfrac{1+\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}\approx\dfrac{D_n(x)+A_n(x)}{D_n(x)-A_n(x)},$

где $\dfrac{A_n(x)}{D_n(x)}$ представляет n-ю подходящую дробь разложения

$$\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)=\cfrac{\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{3+\cfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{5+\ldots+\cfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2n+1+\ldots}}}} \quad 55\ (111)$$

(см. гл. III, § 3, п. 6,6°).

6. Рациональные приближения.

1°. $e^x=\dfrac{\left[\sum\limits_{k=0}^{3}a_{2k}\left(\frac{x}{3}\right)^{2k}\right]+\left[\frac{x}{3}\sum\limits_{k=0}^{3}b_{2k}\left(\frac{x}{3}\right)^{2k}\right]}{\left[\sum\limits_{k=0}^{3}a_{2k}\left(\frac{x}{3}\right)^{2k}\right]-\left[\frac{x}{3}\sum\limits_{k=0}^{3}b_{2k}\left(\frac{x}{3}\right)^{2k}\right]}, \qquad |x|<\pi.$

a_0	0,864 864	b_0	1,297 296
a_2	0,898 128	b_2	0,374 22
a_4	0,102 06	b_4	0,018 370 8
a_6	0,002 041 2	b_6	0,000 109 35

$$r=10^{-9}.$$

Каждое из выражений, заключенных в квадратные скобки, является очень хорошей аппроксимацией соответственно для

$$\operatorname{ch}\frac{x}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{sh}\frac{x}{2}. \qquad 60\,(84)$$

2°. Таблица рациональных приближений (аппроксимация Падэ) для

$$e^x \approx \frac{N_p(x)}{D_q(x)}, \qquad p+q \leqslant 2$$

(p и q — степени многочленов N_p и D_q).

$q \backslash p$	0	1	2	Приводятся соответствующие численные значения для $x=1$		
0	1	$1+x$	$1+x+\frac{x^2}{2}$	1,0	2,0	2,5
1	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1+\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}$	$\frac{1+\frac{2}{3}x+\frac{x^2}{12}}{1-\frac{x}{3}}$		3,0	2,75
3	$\frac{1}{1-x+\frac{x^2}{2}}$	$\frac{1+\frac{x}{3}}{1-\frac{2}{3}x+\frac{x^2}{6}}$	$\frac{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}}$	2,0	2,6	2,714 286

81 (170)

3°. Серия (формулы а)—д)) рациональных приближений к e^{-x} на $[0, \infty)$ (см. [49], стр. 181—184 и [48], стр. 68).

$$\text{а)}\ e^{-x} \approx \frac{1}{\left[\sum_{k=0}^{3} a_k x^k\right]^4}, \qquad r = 2{,}4\cdot 10^{-4} \quad (0 \leqslant x \leqslant 16).$$

a_0	1	a_2	0,029 273 2
a_1	0,250 721 3	a_3	0,003 827 8

б) $e^{-x} \approx \dfrac{1}{\left[\sum\limits_{k=0}^{4} a_k x^k\right]^4}, \qquad r = 2{,}3 \cdot 10^{-5} \quad (0 \leqslant x \leqslant 16).$

a_0	1	a_3	0,002 277 23
a_1	0,249 910 35	a_4	0,000 266 95
a_2	0,031 585 65		

в) $e^{-x} \approx \dfrac{1}{\left[\sum\limits_{k=0}^{5} a_k x^k\right]^4}, \qquad r = 2{,}4 \cdot 10^{-6} \quad (0 \leqslant x \leqslant 16).$

a_0	1	a_3	0,002 673 255
a_1	0,250 010 936	a_4	0,000 127 992
a_2	0,031 198 056	a_5	0,000 014 876

г) $e^{-x} \approx \dfrac{1}{\left[\sum\limits_{k=0}^{6} a_k x^k\right]^4}, \qquad r = 2{,}5 \cdot 10^{-7} \quad (0 \leqslant x \leqslant 16).$

a_0	1	a_4	0,000 171 562 0
a_1	0,249 998 684 2	a_5	0,000 005 430 2
a_2	0,031 257 583 2	a_6	0,000 000 690 6
a_3	0,002 591 371 2		

д) $e^{-x} \approx \dfrac{1}{\left[\sum\limits_{k=0}^{5} a_k x^k\right]^8}, \qquad r = 1{,}1 \cdot 10^{-7}.$

a_0	1	a_3	0,000 326 627
a_1	0,125 000 204	a_4	0,000 009 652
a_2	0,007 811 604	a_5	0,000 000 351

4°. Серия (формулы а)—в)) рациональных приближений к $\frac{1-e^{-x}}{x}$ на интервале $[0,\infty)$ (см. [49], стр. 129—131).

а) $$\frac{1-e^{-x}}{x} \approx \frac{\sum_{k=1}^{2} a_k \xi^k}{\sum_{k=0}^{2} b_k \xi^k}, \quad r = 2\cdot 10^{-3} \ \left(0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leqslant 1{,}0\right),$$
$$\xi = \frac{1}{1+px}, \ p = 0{,}47698.$$

a_0	—	b_0	1
a_1	0,428 50	b_1	— 0,579 53
a_2	0,569 65	b_2	0,579 53

б) $$\frac{1-e^{-x}}{x} \approx \frac{\sum_{k=1}^{3} a_k \xi^k}{\sum_{k=0}^{3} b_k \xi^k}, \quad r = 1{,}5\cdot 10^{-4} \ \left(0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x}} < 1{,}0\right),$$
$$\xi = \frac{1}{1+px}, \quad p = 0{,}3606032.$$

a_0	—	b_0	1
a_1	0,367 162 6	b_1	—1,356 271 0
a_2	—0,227 223 2	b_2	1,614 808 7
a_3	0,860 199 6	b_3	—0,258 537 7

в) $$\frac{1-e^{-x}}{x} \approx \frac{\sum_{k=1}^{4} a_k \xi^k}{\sum_{k=0}^{4} b_k \xi^k}, \quad r = 1{,}2\cdot 10^{-5} \ \left(0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leqslant 1{,}0\right),$$
$$\xi = \frac{1}{1+px}, \quad p = 0{,}28989933.$$

a_0	—	b_0	1
a_1	0,289 053 86	b_1	—2,217 814 31
a_2	—0,332 404 94	b_2	3,331 319 12
a_3	0,455 484 98	b_3	—1,627 814 95
a_4	0,587 854 66	b_4	0,514 310 14

5°. Серия (формулы а) — в)) рациональных приближений к $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ (см. [49], стр. 151—153).

а) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} \approx \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{3} b_{2k}x^{2k}}$ $\quad (|x|<\infty), \quad r=3\cdot 10^{-3}$ $(0 \leqslant x \leqslant 5)$.

b_0	2,490 895	b_4	—0,024 393
b_2	1,466 003	b_6	0,178 257

б) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} \approx \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{4} b_{2k}x^{2k}}$ $\quad (|x|<\infty), \quad r=8\cdot 10^{-4}$ $(0 \leqslant x \leqslant 5)$.

b_0	2,511 261	b_6	—0,063 417
b_2	1,172 801	b_8	0,029 461
b_4	0,494 618		

в) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} \approx \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{5} b_{2k}x^{2k}}$ $\quad (|x|<\infty), \quad r=2{,}2\cdot 10^{-4}$ $(0 \leqslant x \leqslant 5)$

b_0	2,505 236 7	b_6	0,130 646 9
b_2	1,283 120 4	b_8	—0,020 249 0
b_4	0,226 471 8	b_{10}	0,003 913 2

7. Итерационные процессы. 1°. Модифицированный метод Бригга для вычисления 2^x $(0<x<1)$ Пусть

$$c_k = \log_2(1+2^{-k}) \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots).$$

Полагая $x_0 = x$, строим последовательно x_k, a_k $(k=1,\ 2,\ \ldots)$, где

$$x_{i+1} = x_i \quad \text{и} \quad a_{i+1} = 0, \quad \text{если } x_i < c_{i+1},$$
$$x_{i+1} = x_i - c_i \quad \text{и} \quad a_{i+1} = 1, \quad \text{если } x_i \geqslant c_{i+1}.$$

Тогда

$$2^x=\prod_{k=1}^{\infty}(1+2^{-k})^{a_k}.$$

$$2^x\approx\prod_{k=1}^{n}(1+2^{-k})^{a_k},\quad \varepsilon_n=2^{2^{-n}}-1\approx\ln 2\cdot 2^{-n}. \qquad 55\,(115)$$

§ 2. Логарифмическая функция

1. Общие сведения. 1°. Логарифмическая функция $\log_a x$ — логарифм x при основании a ($a>0$, $a\neq 1$) — функция, обратная показательной функции:

$$a^{\log_a x}=x,\quad \log_a a^y=y.$$

Натуральный логарифм — логарифм при основании e:

$$\ln x=\log_e x,$$
$$e^{\ln x}=x,\quad \ln e^y=y.$$

Десятичный логарифм — логарифм при основании 10:

$$\lg x=\log_{10}x.$$

Логарифмическая функция определена и непрерывна на интервале $(0, +\infty)$. Если $a>1$, то $\log_a x$ есть возрастающая и вогнутая функция, $\log_a x<0$ при $x<1$, $\log_a x>0$ при $x>1$; если $0<a<1$, то $\log_a x$ есть убывающая и выпуклая функция, $\log_a x>0$ при $x<1$, $\log_a x<0$ при $x>1$.

2°. Связь между логарифмами при разных основаниях:

а) $\log_b a=\dfrac{1}{\log_a b}$,

б) $\log_a x=-\log_{\frac{1}{a}} x$;

последнее соотношение позволяет выразить логарифм при основании $a_1=\dfrac{1}{a}<1$ через логарифм при основании $a>1$. Поэтому в дальнейшем будем всегда считать основание $a>1$.

в) $\log_a x=\log_b x\log_a b=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

В частности,

$$\log_a x=\ln x\log_a e=\frac{\ln x}{\ln a}.$$

Например,

$$\lg x = M \ln x, \quad \ln x = \frac{1}{M} \lg x,$$

где

$$M = \lg e = 0{,}43429448190325182765\ldots,$$
$$\frac{1}{M} = \ln 10 = 2{,}30258509299404568402\ldots$$

(M называется *модулем перехода от натуральных логарифмов к десятичным*),

$$\log_2 x = M_1 \ln x, \quad \ln x = \frac{1}{M_1} \log_2 x,$$
$$M_1 = \log_2 e = 1{,}44269504088893407360\ldots,$$
$$\frac{1}{M_1} = \ln 2 \quad = 0{,}69314718055994530942\ldots$$

3°. Основные соотношения:

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y,$$
$$\log_a x^\alpha \quad = \alpha \log_a x.$$

Каждому числу $x > 0$ *однозначно отвечает целое число* $n > 1$ *такое, что*

$$a^n \leqslant x < a^{n+1} \qquad (n = E(\log_a x)).$$

Тогда

$$x = a^n y = a^{n+1} y_1, \quad 1 \leqslant y \leqslant a, \quad \frac{1}{a} \leqslant y_1 = \frac{1}{a} y < 1,$$
$$\log_a x = n + \log_a y = (n+1) + \log_a y_1.$$

Нахождение логарифма при основании a любого положительного числа сводится к нахождению логарифма числа из интервала $(1,\ a)$ или $\left(\frac{1}{a},\ 1\right)$:

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x \to +0} \log_a x = -\infty.$$

4°. При любом $\alpha > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \left((\log_a x) \cdot x^{-\alpha} \right) = 0,$$

т. е. логарифм растет медленнее любой степенной функции x^α:

$$\lim_{x \to +0} \left((\log_a x) \cdot x^\alpha \right) = 0.$$

При этом, если $\alpha > n > 0$, то для любой производной порядка $k < n$

$$\lim_{x \to +0} \left((\log_a x) \cdot x^{\alpha} \right)^{(k)} = 0.$$

5°. Логарифмическая функция, как предел:

$$\ln x = \lim_{n \to \infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(x^h - 1\right).$$

Предельный переход — равномерный на любом отрезке $[a, b]$, где $0 < a < b$. При этом и производная $\left[\frac{1}{h}(x^h - 1)\right]'$ при $h \to 0$ равномерно на $[a, b]$ стремится к $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

6°. Логарифм в комплексной области. Пусть $z = x + iy = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; $\ln z = \ln\varrho + i\varphi$; так как φ определена с точностью до $k \cdot 2\pi$ (k — любое целое число), то $\ln z$ определен с точностью до $k \cdot 2\pi i$ (логарифм в комплексной области — многозначная функция). В частности,

$$\ln 1 = k \cdot 2\pi i, \qquad \ln(-1) = \pi + k \cdot 2\pi i,$$

$$\ln i = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi i, \qquad \ln(-i) = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi i.$$

2. Степенные разложения.

1°. $\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \quad (-1 < x \leqslant 1).$ 26 (57)

а) $\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k} \quad (0 < x < 2).$

б) $\ln(1 + x) = \frac{1}{1+x}\left[x + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k(k-1)}\right] \quad (-1 < x < 2).$

2°. $\ln x = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2k-1} \quad (0 < x).$ 26 (58)

3°. $\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{x-1}{x}\right)^k \quad \left(x \geqslant \frac{1}{2}\right)$ 26 (58); 39 (124)

4°. $\ln\frac{1+x}{1-x}=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}x^{2k-1}$ $(|x|<1)$. 26 (58); 32 (421)

5°. $\ln\frac{x+1}{x-1}=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)x^{2k-1}}$ $(|x|>1)$. 26 (58); 39 (124)

6°. $\ln\frac{x}{1-x}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{kx^k}$ $(|x|>1)$. 26 (58); 52 (25)

7°. $\frac{1}{2}\{\ln(1\pm x)\}^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}x^{k+1}}{k+1}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}$

$(|x|<1)$. 26(59); 52 (23)

3. Ортогональные и другие многочленные разложения. А. Разложения по многочленам Чебышева.

1°. $\ln\frac{1+p^2+2px}{1+p^2-2px}=4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^{2k+1}}{2k+1}T_{2k+1}(x)$ $(|x|<1)$,

$r_{n-1}<\frac{4p^{2k+1}}{(2k+1)(1-p^2)}$. 19 (10)

а) $\ln x=\frac{\ln 2}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4p^{2k+1}}{2k+1}T_{2k+1}\left((\sqrt{2}+1)^2\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right)$

$(1\leqslant x\leqslant 2)$, $p=\frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[4]{2}+1}\approx 0{,}08642723372$,

$r_{n-1}<\frac{4p^{2k+1}}{(2k+1)(1-p^2)}$. 19 (11,12)

б) $\ln x=-\frac{1}{2}\ln 2-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4p^{2k+1}}{2k+1}T_{2k+1}\left[(\sqrt{2}+1)^2\frac{1-\sqrt{2}\,x}{1+\sqrt{2}\,x}\right]$

$\left(\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right)$, $r_{n-1}<\frac{4p^{2n+1}}{(2n+1)(1-p^2)}$.

n	$\frac{4p^n}{n}$	n	$\frac{4p^n}{n}$
1	0,345 708 934 90	7	0,000 000 020 58
3	0,000 860 776 94	9	0,000 000 000 12
5	0,000 003 857 83		

18 (105)

2°. $\ln(1+x)=\sum_{k=0}^{\infty} A_k T_k(1+4x) \qquad \left(-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 0\right);$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=0}^{\infty} A'_k T_k[1+(4+2\sqrt{2})x]$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\leqslant x\leqslant 0\right).$$

k	A_k	A'_k
0	—0,316 694 367 64	—0,165 789 090 74
1	0,343 145 750 51	0,172 854 467 45
2	—0,029 437 251 52	—0,007 469 666 73
3	0,003 367 089 26	0,000 430 388 42
4	—0,000 433 275 89	—0,000 027 897 96
5	0,000 059 470 71	0,000 001 928 91
6	—0,000 008 502 97	—0,000 000 138 93
7	0,000 001 250 47	0,000 000 010 29
8	—0,000 000 187 73	—0,000 000 000 78
9	0,000 000 028 63	0,000 000 000 06
10	—0,000 000 004 42	
11	0,000 000 000 69	
12	—0,000 000 000 11	
13	0,000 000 000 02	

18 (104)

3°. $\lg(1+x)=\sum_{k=0}^{\infty} A_k T_k(2x-1) \qquad (0\leqslant x\leqslant 1).$

k	A_k	k	A_k
0	0,376 452 813	6	—0,000 008 503
1	0,343 145 750	7	0,000 001 250
2	—0,029 437 252	8	—0,000 000 188
3	0,003 367 089	9	0,000 000 029
4	—0,000 433 276	10	—0,000 000 004
5	0,000 059 471	11	0,000 000 001

47 (146)

4°. $$\lg(x+a)-\lg a=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^k}{k}\left\{1-(-1)^k T_k\left(\frac{x+1}{2}\right)\right\}=$$

$$=-2\lg(1-q)-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k q^k}{k}T_k\left(\frac{x+1}{2}\right),$$

$$q=2a+1-2(a^2+a)^{\frac{1}{2}}\qquad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

$$r_n=\frac{4\,|q^{n+1}|}{(n+1)\,|1-q|}. \qquad 63\,(16)$$

Формула справедлива и для комплексных $a\neq 0$, $\arg\leqslant\frac{\pi}{2}$.

Б. По многочленам Лежандра.

5°. $$\ln\frac{x+3}{3-x}=\sum_{k=1}^{\infty}A_{2k-1}P_{2k-1}(x)\qquad (|x|<1).$$

k	A_{2k-1}	k	A_{2k-1}
1	0,682 233 833 281	5	0,000 000 152 405
2	0,010 668 387 537	6	0,000 000 004 046
3	0,000 238 906 394	7	0,000 000 000 109
4	0,000 005 896 784		

4. Многочленные приближения. Приближения $\ln(1+x)$.

1°. $$\ln(1+x)\approx\sum_{k=0}^{3}a_k x^k,\qquad r=5{,}3\cdot 10^{-4}\qquad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

a_0	0,000 49	a_2	−0,397 28
a_1	0,982 48	a_3	0,107 84

47 (144)

2°. Серия (формулы а)—д)) наилучших приближений для $\ln(1+x)$ на (0,1) (см. [49], стр. 176—180):

а) $$\ln(1+x)\approx\sum_{k=1}^{4}a_k x^k,\qquad r=7{,}5\cdot 10^{-5}\qquad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

a_1	0,997 444 2	a_3	0,225 668 5
a_2	−0,471 283 9	a_4	−0,058 752 7

б) $\ln(1+x) \approx \sum_{k=1}^{5} a_k x^k, \quad r = 10^{-5} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$

a_1	0,999 495 56	a_4	—0,136 062 75
a_2	—0,491 908 96	a_5	0,032 158 45
a_3	0,289 474 78		

в) $\ln(1+x) \approx \sum_{k=1}^{6} a_k x^k, \quad r = 1{,}5 \cdot 10^{-6} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$

a_1	0,999 901 67	a_4	—0,193 761 49
a_2	—0,497 875 44	a_5	0,085 569 27
a_3	0,317 650 05	a_6	—0,018 338 31

г) $\ln(1+x) \approx \sum_{k=1}^{7} a_k x^k, \quad r = 2{,}2 \cdot 10^{-7} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$

a_1	0,999 981 028	a_5	0,134 639 267
a_2	—0,499 470 150	a_6	—0,055 119 959
a_3	0 328 233 122	a_7	0,010 757 369
a_4	—0,225 873 284		

д) $\ln(1+x) \approx \sum_{k=1}^{8} a_k x^k, \quad r = 3{,}2 \cdot 10^{-8} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$

a_1	0,999 996 423 9	a_5	0,167 654 071 1
a_2	—0,499 874 123 8	a_6	—0,095 329 389 7
a_3	0,331 799 025 8	a_7	0,036 088 493 7
a_4	—0,240 733 808 4	a_8	—0,006 453 544 2

3°. $\ln(1+x) \approx \sum_{k=0}^{12} a_k x^k \qquad \left(-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 0\right).$

a_0	—0,000 000 000 01	a_6	—0,276 111 962 93
a_1	0,999 999 990 26	a_7	—0,459 239 902 41
a_2	—0,500 001 065 85	a_8	—2,352 660 611 07
a_3	0,333 287 735 65	a_9	—5,397 653 173 04
a_4	—0,251 007 902 11	a_{10}	—8,894 125 650 74
a_5	0,186 831 717 99	a_{11}	—8,211 977 469 95
		a_{12}	—3,724 595 639 09

18 (1 18)

4°. $\ln(1-x)\approx\sum_{k=1}^{5} a_k x^k,\quad r=4{,}11\cdot 10^{-7}\quad \left(0\leqslant x<1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$

a_1	$-1{,}000\,029\,4$	a_4	$-0{,}151\,410\,4$
a_2	$-0{,}498\,850\,1$	a_5	$-0{,}455\,877\,5$
a_3	$-0{,}349\,443\,8$		

5°. $\ln(1-x)\approx\sum_{k=0}^{5} a_k x^k,\quad r=4{,}11\cdot 10^{-7}\quad \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right).$

a_0	$0{,}008\,002\,0$	a_3	$-2{,}491\,775\,5$
a_1	$-1{,}118\,249\,4$	a_4	$3{,}171\,873\,2$
a_2	$0{,}207\,236\,6$	a_5	$-2{,}579\,317\,0$

6°. $\ln(1-x)\approx\sum_{k=1}^{9} a_k x^k,\quad r=10^{-6}\quad \left(0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right).$

a_1	$-1{,}000\,002$	a_6	$0{,}623\,373$
a_2	$-0{,}499\,919$	a_7	$-2{,}122\,103$
a_3	$-0{,}335\,428$	a_8	$2{,}649\,698$
a_4	$-0{,}223\,585$	a_9	$-1{,}877\,585$
a_5	$-0{,}387\,483$		

7°. $\ln\frac{a+x}{a-x}\approx 0{,}4483470x+0{,}0510518\,x^3,$

$$a=\frac{10^{\frac{1}{2}}+1}{10^{\frac{1}{2}}-1},\quad r=6{,}012\cdot 10^{-4}\quad (|x|\leqslant 1).\quad 67\,(189)$$

8°. $\ln\frac{a+x}{a-x}\approx\sum_{k=0}^{2} a_{2k+1}\,x^{2k+1},\quad r=3{,}37\cdot 10^{-6}\quad (|x|\leqslant 1).$

a_1	$0{,}869\,028\,5$
a_3	$0{,}277\,386\,4$
a_5	$0{,}254\,319\,5$

67 (190)

9°. $\ln(1+e^{-x}) \approx \left(\sum_{k=0}^{4} a_k x^k\right)^{-2} \ln 2,$

$$r = 2{,}6 \cdot 10^{-4} \qquad (0 \leqslant x < \infty).$$

a_0	1	a_3	0,0094
a_1	0,3581	a_4	0,0052
a_2	0,1151		

50 (46)

10°. $\ln(1+e^{-x}) \approx \left(\sum_{k=0}^{5} a_k x^k\right)^{-2} \ln 2,$

$$r = 4{,}5 \cdot 10^{-5} \qquad (0 \leqslant x < \infty).$$

a_0	1	a_3	0,024 11
a_1	0,361 23	a_4	—0,000 55
a_2	0,102 04	a_5	0,000 69

50 (46)

11°. $\ln(1+e^{-x}) \approx \left(\sum_{k=0}^{6} a_k x^k\right)^{-2} \ln 2,$

$$r = 8 \cdot 10^{-6} \qquad (0 \leqslant x < \infty).$$

a_0	1	a_4	0,002 654
a_1	0,360 571	a_5	—0,000 100
a_2	0,105 546	a_6	0,000 066
a_3	0,018 760		

50 (46)

5. Разложения в цепные дроби.

1°. $\ln(1+x) = \frac{x}{1+x-}\,\frac{x}{2-}\,\frac{x}{3(1+x)-}\,\frac{2x}{2-}\,\frac{2x}{5(1+x)-}\ldots$

$$\ldots\frac{nx}{2-}\,\frac{nx}{(2n+1)(1+x)-}\ldots \qquad 34\,(109)$$

2°. $\ln(1+x) = \frac{x}{1+}\,\frac{x}{2+}\,\frac{x}{3+}\,\frac{2x}{2+}\,\frac{2x}{5+}\ldots$

$$\ldots+\frac{nx}{2+}\,\frac{nx}{2n+1+}\ldots \qquad 34\,(109)$$

Эта дробь сходится на плоскости комплексного переменного x, разрезанной по действительной оси от $x = -\infty$ до $x = -1$.

$$3^\circ.\ \ln(1+x)=\frac{x}{1+x-}\,\frac{x(1+x)}{2+3x-}\,\frac{4x(1+x)}{3+5x-}\ldots$$

$$\ldots\frac{n^2x(1+x)}{-n+1+(2n+1)x-}\ldots.\qquad 34\,(110)$$

$$4^\circ.\ \ln(1+x)=\frac{x}{1+}\,\frac{x}{2-x+}\,\frac{4x}{3-2x+}\ldots$$

$$\ldots+\frac{n^2x}{n+1-nx+}\ldots.\qquad 34\,(110)$$

Это равноценная дробь *) для $\ln(1+x)$.

$$5^\circ.\ \ln(1+x)=\frac{2x}{2+x-}\,\frac{x^2}{3(2+x)-}\,\frac{4x^2}{5(2+x)-}\ldots$$

$$\ldots-\frac{n^2x^2}{(2n+1)(2+x)-}\ldots.\qquad 34\,(110)$$

$$6^\circ.\ \ln x=\frac{x-1}{1+}\,\frac{1^2(x-1)}{2+}\,\frac{1^2(x-1)}{3+}+$$

$$+\frac{2^2(x-1)}{4+}\,\frac{2^2(x-1)}{5+}\,\frac{3^2(x-1)}{6+}\ldots.\qquad 77\,(128)$$

Для вычисления $\ln x$ с девятью десятичными знаками нужно взять: 16 членов при $x=0{,}5108$; 11 при $x=0{,}6931$; 7 при $x=0{,}9163$ и 6 при $x=2{,}3026$.

$$7^\circ.\ \ln x=\frac{2(x-1)}{x+1-}\,\frac{(x-1)^2}{3(x+1)-}\,\frac{4(x-1)^2}{5(x+1)-}$$

$$\frac{0}{1}\quad\frac{2(x-1)}{x+1}\quad\frac{6(x^2-1)}{2x^2+8x+2}\quad\frac{2(x-1)(11x^2+38x+11)}{6(x+1)(x^2+8x+1)}$$

$$-\frac{9(x-1)^2}{7(x+1)}-\ldots-\frac{n^2(x-1)^2}{(2n+1)(x+1)-}\ldots.$$

$$\frac{20(x^2-1)(5x^2+32x+5)}{24(x^4+16x^3+36x^2+16x+11)}\qquad 34\,(110)$$

При $x\geqslant 1$ имеем отсюда цепь неравенств

$$\ln x\geqslant\ldots\geqslant\frac{5(x^2-1)(5x^2+32x+5)}{6(x^4+16x^3+36x^2+16x+1)}\geqslant\frac{(x-1)(11x^2+38x+11)}{3(x+1)(x^2+8x+1)}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}\geqslant 2\frac{x-1}{x+1}.\qquad 34\,(111)$$

---

*) *Равноценной дробью* для степенного ряда называется цепная дробь, у которой последовательность подходящих дробей совпадает с последовательностью частных сумм ряда.

8°. Серия рациональных приближений, полученных с помощью формулы Обрешкова:

$$\ln x \approx \sum_{\nu=1}^{m} (-1)^{\nu-1} \frac{C_m^\nu}{C_{m+k}^\nu} \frac{(x-1)^\nu}{\nu} + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{C_k^\nu}{C_{m+k}^\nu} \frac{(x-1)^\nu}{\nu x^\nu}.$$

В частности, при $m=k$

$$\ln x \approx \sum_{\nu=1}^{k} \frac{C_k^\nu}{C_{2k}^\nu} \left[(-1)^{\nu-1} + \frac{1}{x^\nu}\right] \frac{(x-1)^\nu}{\nu}.$$

Например, при $k=1$

$$\ln x \approx \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right),$$

при $k=2$

$$\ln x \approx \frac{x^2-1}{12x^2}(8x - x^2 - 1). \qquad \text{I(311)}$$

6. Рациональные приближения. 1°. Серия (формулы а)—д)) рациональных приближений $y=\lg x$ для интервала $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \sqrt{10}\right)$. Заменяя в этих формулах $\frac{x-1}{x+1}$ на $\frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}}$, получим формулы той же точности для $\left(\lg x - \frac{1}{2}\right)$ на интервале (1, 10) (формулу д) см. [48], стр. 68, остальные — [49], стр. 125—128).

а) $\lg x \approx \sum_{k=1}^{2} a_{2k-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2k-1} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \leqslant x \leqslant \sqrt{10}\right),$

$r = 7\cdot 10^{-4} \qquad (1 \leqslant x \leqslant \sqrt{10}).$

a_1	0,863 04	a_3	0,364 15

б) $\lg x \approx \sum_{k=1}^{3} a_{2k-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2k-1} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \leqslant x \leqslant \sqrt{10}\right),$

$r = 4\cdot 10^{-5} \qquad (1 \leqslant x \leqslant \sqrt{10}).$

a_1	0,869 028 6	a_3	0,277 383 9	a_5	0,254 327 5

в) $$\lg x \approx \sum_{k=1}^{4} a_{2k-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2k-1} \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \leqslant x \leqslant \sqrt{10}\right),$$

$$r = 2\cdot 10^{-6} \qquad (1 \leqslant x \leqslant \sqrt{10}).$$

a_1	0,868 554 34	a_5	0,153 613 71
a_3	0,291 150 68	a_7	0,211 394 97

г) $$\lg x \approx \sum_{k=1}^{5} a_{2k-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2k-1} \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \leqslant x \leqslant \sqrt{10}\right),$$

$$r = 1{,}5\cdot 10^{-7} \qquad (1 \leqslant x \leqslant \sqrt{10}).$$

a_1	0,868 591 718	a_7	0,094 376 476
a_3	0,289 335 524	a_9	0,191 337 714
a_5	0,177 522 071		

д) $$\lg x \approx \sum_{k=1}^{6} a_{2k-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2k-1},$$

$$r = 1{,}5\cdot 10^{-8}.$$

a_1	0,868 588 8	a_7	0,131 438 1
a_3	0,289 549 7	a_9	0,054 756 2
a_5	0,173 115 9	a_{11}	0,183 241 5

Приближения $\ln x$.

2°. $$\ln x \approx -\frac{1}{2}\ln 2 + \sum_{k=0}^{2} a_{2k+1}u^{2k+1}, \qquad u = \frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\left(\frac{1}{2} \leqslant x < 1\right), \qquad r = 3\cdot 10^{-8}.$$

a_1	2,000 000 815	a_3	0,666 445 069	a_5	0,415 054 254

3°. $\ln x \approx -\frac{1}{2}\ln 2 + \sum_{k=0}^{3} a_{2k+1}u^{2k+1}, \qquad u = \dfrac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$\left(\frac{1}{2} \leqslant x < 1\right).$$

a_1 a_3	1,999 999 993 788 0,666 669 470 507	a_5 a_7	0,399 659 100 019 0,300 974 506 336

7 (4, 5)

4°. $\ln x \approx \ln 2\left[-\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{3} a_{2k+1}u^{2k+1}\right], \qquad u = \dfrac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$\left(\frac{1}{2} \leqslant x < 1\right), \qquad r = 2^{-32}.$$

a_1 a_3	2,885 390 072 74 0,961 800 762 29	a_5 a_7	0,576 584 342 06 0,434 259 751 29

5°. $\ln x = u\sum_{k=0}^{5} a_{2k}u^{2k}, \qquad u = 3\dfrac{x-1}{x+1} \quad (2^{-35} < x < 1).$

a_0 a_2 a_4	0,666 666 666 0,024 691 358 0,001 616 092	a_6 a_8 a_{10}	0,000 130 642 0,000 011 290 0,000 001 132

3 (286)

6°. $\ln x \approx \ln a + \sum_{k=1}^{7} a_{2k-1}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^{2k-1}, \quad a = 10^{n+\frac{1}{2}}$ при

$$10^n \leqslant x \leqslant 10^{n+1}, \qquad n = 0, \pm 1, \ldots, \quad r < 3\cdot 10^{-10}.$$

a_1 a_3 a_5 a_7	2,000 000 036 6 0,666 661 710 0 0,400 193 032 6 0,282 433 571 2	a_9 a_{11} a_{13}	0,250 341 093 0 0,057 228 326 5 0,410 597 043 8

60 (88)

7°. $\ln x \approx z \sum_{k=0}^{6} a_k (z^2)^k, \quad z = \frac{x-1}{x+1} \quad \left(\frac{1}{2} \leqslant x < 1\right).$

a_0	2,000 000 000 00	a_4	0,223 206 676 54
a_1	0,666 666 656 95	a_5	0,170 167 231 05
a_2	0,400 000 986 83	a_6	0,221 370 154 23
a_3	0,285 670 543 63		

8°. Таблица рациональных приближений (аппроксимация Падэ) для $\ln(1+x) \approx \frac{N_p(x)}{D_q(x)}$, $p+q \leqslant 2$ (p и q — степени многочленов N_p и D_q).

$q \backslash p$	0	1	2
0	1	$1-\frac{1}{2}x$	$1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2$
1	$\frac{1}{1+\frac{1}{2}x}$	$\frac{1+\frac{1}{6}x}{1+\frac{2}{3}x}$	$\frac{1+\frac{1}{4}x-\frac{1}{24}x^2}{1+\frac{3}{4}x}$
2	$\frac{1}{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2}$	$\frac{1+\frac{1}{2}x}{1+x+\frac{1}{6}x^2}$	$\frac{1+\frac{7}{10}x+\frac{1}{30}x^2}{1+\frac{6}{5}x+\frac{3}{10}x^2}$

81 (169)

Двоичные логарифмы.

9°. Серия (формулы а) — в)) рациональных приближений $y = \log_2 x$ для интервала $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$. Заменяя в этих формулах $\frac{x-1}{x+1}$ на $\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}$, получим формулы той же точности для $\left(\log_2 x - \frac{1}{2}\right)$ на интервале (1, 2) (см. [49], стр. 164—166).

а) $\log_2 x \approx \sum_{k=1}^{2} a_{2k-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2k-1} \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}\right),$

$$r = 6\cdot 10^{-6} \qquad (1 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}).$$

a_1	2,885 228 73	a_3	0,983 528 29

б) $\log_2 x \approx \sum_{k=1}^{3} a_{2k-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2k-1} \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}\right),$

$$r = 3\cdot 10^{-8} \qquad (1 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}).$$

a_1 a_3	2,885 391 290 3 0,961 470 632 3	a_5	0,598 978 649 6

в) $\log_2 x \approx \sum_{k=1}^{4} a_{2k-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2k-1} \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}\right),$

$$r = 1{,}8\cdot 10^{-10} \qquad (1 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}).$$

a_1 a_3	2,885 390 072 738 0,961 800 762 286	a_5 a_7	0,576 584 342 056 0,434 259 751 292

10°. $\ln\frac{1-x}{1+x} \approx \frac{\sum_{k=0}^{2} a_{2k+1}x^{2k+1}}{\sum_{k=0}^{2} b_{2k}x^{2k}} \qquad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}\right), \qquad r = 4\cdot 10^{-7}.$

a_1 a_3 a_5	—1890 1470 —128	b_0 b_2 b_4	945 —1050 225

11°. $\lg x \approx -0{,}076 + 0{,}281x - \frac{0{,}238}{x+0{,}15} \qquad (0{,}1 \leqslant x \leqslant 1{,}0),$

$r = 0{,}005.$ 48 (68)

12°. $\ln(1+x) \approx \dfrac{13,5294048x^2 - 8,6147976x + 0,0000108}{0,4x^2 + 3,1280130x + 3,5622914}$,

$r = 5 \cdot 10^{-6} \qquad (0 \leqslant x < 1)$. 28 (119)

13°. $\ln(1+x) = \dfrac{x}{2}\left(\dfrac{1}{1+\alpha x} + \dfrac{1}{1+\beta x}\right) + r \qquad (|x| < 1)$,

$$r = \frac{x^5}{180} - \frac{x^6}{72} + \frac{17x^7}{756} - \ldots + (-1)^n\left(\frac{1}{n} - a_n\right)x^n + \ldots,$$

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}}, \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}}, \quad a_n = \frac{1}{2}(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}),$$

$$a_n = a_{n-1} - \frac{1}{6}a_{n-2}.$$

14°. Таблица рациональных приближений (аппроксимация Падэ) для $\left\{-\dfrac{\ln(1-x)}{x} \approx \dfrac{N_p(x)}{D_q(x)}\right\}$, $p+q \leqslant 6$ (p и q — степени многочлена N_p и D_q) (см. [58]).

а) $p = 0$

$q=0$	1
$q=1$	$\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}x}$
$q=2$	$\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^2}$
$q=3$	$\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{24}x^3}$
$q=4$	$\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{24}x^3-\frac{19}{720}x^4}$
$q=5$	$\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{24}x^3-\frac{19}{720}x^4-\frac{3}{160}x^5}$
$q=6$	$\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{24}x^3-\frac{19}{720}x^4-\frac{3}{160}x^5-\frac{863}{60\,480}x^6}$

б) $p=1$

$q=0$	$1+\frac{1}{2}x$
$q=1$	$\frac{6-x}{6-4x}$
$q=2$	$\frac{6-3x}{6-6x+x^2}$
$q=3$	$\frac{90-57x}{90-102x+21x^2+x^3}$
$q=4$	$\frac{3420-2430x}{3420-4140x+930x^2+60x^3+11x^4}$
$q=5$	$\frac{102\,060-77\,670x}{102\,060-128\,700x+30\,330x^2+2220x^3+543x^4+136x^5}$

в) $p=2$

$q=0$	$1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2$
$q=1$	$\frac{24-6x-x^2}{24-18x}$
$q=2$	$\frac{30-21x+x^2}{30-36x+9x^2}$
$q=3$	$\frac{60-60x+11x^2}{60-90x+36x^2-3x^3}$
$q=4$	$\frac{4620-5430x+1360x^2}{4620-7740x-3690x^2-420x^3-9x^4}$

г) $p=3$

$q=0$	$1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x^3$
$q=1$	$\frac{60-18x-4x^2-x^3}{60-48x}$
$q=2$	$\frac{180-150x+12x^2+x^3}{180-240x+72x^2}$
$q=3$	$\frac{420-510x+140x^2-3x^3}{420-720x+360x^2-48x^3}$

д) $p=4$

$q=0$	$1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{5}x^4$
$q=1$	$\frac{360-120x-30x^2-10x^3-3x^4}{360-300x}$
$q=2$	$\frac{1260-1170x+120x^2+15x^3+2x^4}{1260-1800x+600x^2}$

е) $p=5$

$q=0$	$1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{5}x^4+\frac{1}{6}x^5$
$q=1$	$\frac{420-150x-40x^2-15x^3-6x^4-2x^5}{420-360x}$

ж) $p=6$

$q=0$	$1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{5}x^4+\frac{1}{6}x^5+\frac{1}{7}x^6$

58 (42)

15°. Таблица рациональных приближений (аппроксимация Падэ) для $\frac{(x-1)\ln(1-x)}{x} \approx \frac{N_p(x)}{D_q(x)}$, $p+q \leqslant 5$ (p и q — степени многочленов N_p и D_q) (см. [58]).

а) $p=0$

$q=0$	1
$q=1$	$\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}x}$
$q=2$	$\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}x+\frac{5}{12}x^2}$
$q=3$	$\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}x+\frac{5}{12}x^2+\frac{3}{8}x^3}$
$q=4$	$\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}x+\frac{5}{12}x^2+\frac{3}{8}x^3+\frac{251}{720}x^4}$
$q=5$	$\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}x+\frac{5}{12}x^2+\frac{3}{8}x^3+\frac{251}{720}x^4+\frac{95}{288}x^5}$

б) $p=1$

$q=0$	$1-\frac{1}{2}x$
$q=1$	$\dfrac{6-5x}{6-2x}$
$q=2$	$\dfrac{30-27x}{30-12x-x^2}$
$q=3$	$\dfrac{810-753x}{810-348x-39x^2-10x^3}$
$q=4$	$\dfrac{45\,180-42\,750x}{45\,180-20\,160x-2550x^2-870x^3-281x^4}$

в) $p=2$

$q=0$	$1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^2$
$q=1$	$\frac{12-12x+x^2}{12-6x}$
$q=2$	$\frac{30-39x+10x^2}{30-24x+3x^2}$
$q=3$	$\frac{600-870x+281x^2}{600-570x+96x^2+3x^3}$

г) $p=3$

$q=0$	$1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{12}x^3$
$q=1$	$\frac{60-66x+8x^2+8x^3}{60-36x}$
$q=2$	$\frac{60-90x+32x^2-x^3}{60-60x+12x^2}$

д) $p=4$

$q=0$	$1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{20}x^4$
$q=1$	$\frac{180-210x+30x^2+5x^3+x^4}{180-120x}$

е) $p=5$

$q=0$	$1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{20}x^4-\frac{1}{30}x^5$

58 (43)

7. Итерационные процессы. 1°. Итерационный процесс «цифра за цифрой» для нахождения

$$x = \log_2 y \quad (1 \leqslant y < 2).$$

Ищется значение x в двоичной системе:

$$x = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots \qquad (\alpha_i = 0,\ 1).$$

Последовательно находятся x_n, y_n, α_n $(n = 0,\ 1,\ \ldots)$

$$x_0 = x, \quad y_0 = y;$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \text{если} \quad y_0^2 < 2,$$

$$\alpha_1 = 1, \quad \text{если} \quad y_0^2 \geqslant 2.$$

Пусть уже определены α_1, α_2, $\ldots$, α_{i-1} и найдено y_i.

Если $y_i^2 < 2$, то $\alpha_i = 0$, $y_{i+1} = y_i^2$.

Если $y_i^2 \geqslant 2$, то $\alpha_i = 1$, $y_{i+1} = 2^{-1} y_i^2$.

После n шагов найдем n цифр двоичного разложения

$$x = \log_2 y \approx 0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots \qquad 19\,(65)$$

Другие варианты этой задачи см. в [18].

2°. Итерационный процесс для разложения в цепную дробь.

Пусть $a_0 > a_1 > 1$. Для вычисления $\log_{a_0} a_1$ определяются две последовательности

$$a_2,\ a_3,\ \ldots,$$
$$n_1,\ n_2,\ \ldots,$$

где n_i — целые положительные числа, с помощью соотношений

$$a_i^{n_i} < a_{i-1} < a_i^{n_i+1},$$

$$a_{i+1} = \frac{a_{i-1}}{a_i^{n_i}}.$$

Тогда

$$\log_{a_0} a_1 = \frac{1}{n_1 +} \frac{1}{n_2 +} \frac{1}{n_3 + \ldots}.$$

Числители A_i и знаменатели D_i подходящих дробей удобно подсчитывать по рекуррентным формулам

$$A_{i+1}=A_{i-1}+n_{i+1}A_i,$$
$$D_{i+1}=D_{i-1}+n_{i+1}D_i.$$

Предлагается следующая вычислительная схема.

Если $A \geqslant D$, то

$$\frac{A}{D} \longrightarrow A;\quad C+E \longrightarrow C;\quad G+F \longrightarrow G.$$

Если $A<D$, то

$$A \rightleftarrows D;\quad C \rightleftarrows E;\quad G \rightleftarrows F.$$

Сначала $(A)=a_0$; $(D)=a_1$; $(C)=1$; $(F)=1$; $(G)=0$; $(E)=0$

$$\log_{a_0} a_1=\frac{(E)}{(F)}. \qquad 74\,(60—64)$$

ГЛАВА III

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ, ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ И ИМ ОБРАТНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Тригонометрические функции

1. Общие сведения. 1°. Тригонометрические функции. Функции $\sin x$ и $\cos x$ определены на всей оси, непрерывны и ограничены на ней, функция $\operatorname{tg} x$ определена и непрерывна всюду, кроме точек $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, функция $\operatorname{ctg} x$ — всюду, кроме точек $x=n\pi$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Функции $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$ обратны соответственно $\cos x$ и $\sin x$: $\sec x=\frac{1}{\cos x}$, $\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}$,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x=+\infty, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x=-\infty,$$

$$\lim_{x\to+0} \operatorname{ctg} x=+\infty, \qquad \lim_{x\to-0} \operatorname{ctg} x=-\infty.$$

Аргумент x в тригонометрических функциях $\sin x$, $\cos x$ и т. д. можно истолковывать как радианную меру дуги или угла.

Тригонометрические функции — периодические; период $\sin x$ и $\cos x$ равен 2π, период $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ равен π.

2°. $\cos x$ — функция четная, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ — нечетные.

$$\sin x=\operatorname{sign} x \sin|x|, \qquad \cos x=\cos|x|,$$

$$\operatorname{tg} x=\operatorname{sign} x \operatorname{tg}|x|, \qquad \operatorname{ctg} x=\operatorname{sign} x \operatorname{ctg}|x|.$$

3°. Формулы сложения и функциональные уравнения.

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$
$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Следствия этих формул:

а) $\Delta_h \cos x = \cos(x+h) - 2\cos x + \cos(x-h) = -\pi_h \cos x,$
$\Delta_h \sin x = \sin(x+h) - 2\sin x + \sin(x-h) = \pi_h \sin x,$

где $\pi_h = 4\sin^2\frac{h}{2}$.

б) $a\cos x + b\sin x = \varrho \sin(x+\varphi),$

$$\varrho = \sqrt{a^2+b^2},\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

Формулы сложения являются определяющими для тригонометрических функций.

Функции $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos x$ суть единственные непрерывные решения функционального уравнения

$$f_1(x+y) = f_1(x) f_2(y) + f_1(y) f_2(x)$$

при условии положительности этих функций на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $f_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

$f(x) = \operatorname{tg} x$ есть единственное непрерывное решение уравнения

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$$

при условии положительности $f(x)$ на $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ и $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

4°. Общие формулы кратных углов. Формула Муавра.

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx,$$
$$\cos nx = \operatorname{Re}(\cos x + i\sin x)^n = H_n^{(0)}(\cos x, \sin x),$$
$$\sin nx = \operatorname{Im}(\cos x + i\sin x)^n = H_n^{(1)}(\cos x, \sin x),$$

$$\operatorname{tg} nx = \frac{H_n^{(1)}(1, \operatorname{tg} x)}{H_n^{(0)}(1, \operatorname{tg} x)} \qquad \operatorname{ctg} nx = \frac{H_n^{(0)}(\operatorname{ctg} x, 1)}{H_n^{(1)}(\operatorname{ctg} x, 1)},$$

где H_n^0 и H_n^1—гармонические многочлены (см. стр. 161).

Имеем также

$$\cos nx = T_n(\cos x), \quad \sin nx = \sin x U_{n-1}(\cos x),$$
$$\cos 2kx = (-1)^k T_{2k}(\sin x),$$
$$\sin 2kx = (-1)^{k+1} \cos x U_{2k-1}(\cos x),$$
$$\sin(2k+1)x = (-1)^k T_{2k+1}(\sin x),$$
$$\cos(2k+1)x = (-1)^{k+1} \cos x U_{2k}(\sin x).$$

5°. Формулы

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

позволяют свести одновременное вычисление $\sin x$, $\cos x$ к вычислению $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

6°. Запись некоторых формул приведения.

а) Приведение $\sin \frac{\pi}{2} x$ к интервалу $(-1, 1)$:

$$z = \left| \left| \left\{ \frac{x-1}{4} \right\} \right| 4 - 2 \right| - 1, \quad |z| \leqslant 1,$$

$$\sin \frac{\pi}{2} z = \sin \frac{\pi}{2} x. \qquad 18\,(98)$$

Формула справедлива для произвольного действительного x.

б) Если $|x| < 2$, то $z = \big| |x-1| - 2 \big| - 1$.

в) Если $|x| < 4$, то $z = 1 - \big| \big| |x-1| - 2 \big| - 2 \big|$.

г) Приведение $\sin x$ к интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$|x| = 2\pi\alpha + \pi\beta + \frac{\pi}{2}\gamma + \frac{\pi}{2}\delta, \qquad 18(98)$$

где α — целое число периодов, $\beta = 0, 1$; $\gamma = 0, 1$; $0 \leqslant \delta < 1$.

$$t = (-1)^\beta \operatorname{sign} x\,[\gamma + (-1)^\gamma \delta], \quad |t| < 1,$$

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{2} t. \qquad 10$$

Формула справедлива для произвольного действительного x.

д) $t=2\left[\frac{x}{\pi}\right]-\frac{2x}{\pi}$ при $\beta\neq\gamma$,

е) $t=\frac{2x}{\pi}-2\left[\frac{x}{\pi}\right]$ при $\beta=\gamma$,

где $2\left[\frac{x}{\pi}\right]=2\operatorname{sign}x\cdot(2\alpha+\beta+\gamma)$ есть удвоенное ближайшее целое числа $\frac{x}{\pi}$. 10

ж) Приведение $\operatorname{tg}x$ к интервалу $\left(-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right)$:

$$u=\left\{\frac{x}{\pi}-\frac{1}{4}\right\},$$

$$v=|u|-\frac{1}{2},$$

$$z=|v|-\frac{1}{4}=\left|\left|\left\{\frac{x}{\pi}-\frac{1}{4}\right\}\right|-\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{4},\quad |z|<\frac{1}{4},$$

$$\operatorname{tg}x=\begin{cases}\operatorname{tg}\pi z, & \text{если}\quad uv\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{\operatorname{tg}\pi z}, & \text{если}\quad uv<0.\end{cases}$$ 18 (99)

з) Приведение $\operatorname{tg}x$ к интервалу $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$:

$$z=\pi\left\{\frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}\right\}-\frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}z.$$ 18 (99)

7°. Связь с показательной функцией.

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\quad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

(формулы Эйлера).

На основе формул Эйлера определяются тригонометрические функции комплексного аргумента.

8°. Связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями.

а) $\sin x=-i\operatorname{sh}ix$.

б) $\cos x=\operatorname{ch}ix$.

в) $\operatorname{tg}x=\frac{1}{i}\operatorname{th}ix$.

г) $\operatorname{ctg}x=i\operatorname{cth}ix$.

2. Степенные разложения.

1°. $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

2°. $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$.

Рекуррентная запись 1° и 2°:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} u_k, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} u'_k,$$

$$u_0 = x, \quad u'_0 = 1,$$

$$u_{k+1} = -\frac{x^2}{(2k+3)(2k+2)} u_k, \quad u'_{k+1} = -\frac{x^2}{(2k+2)(2k+1)} u'_k. \qquad 20(237)$$

3°. $\sin \pi x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{k!} [x(1-x)]^k$,

$$A_k = \left[\frac{d^{k-1}(1-x)^{-k} \pi \cos \pi x}{dx^{k-1}}\right]_{x=0}. \qquad 24(362)$$

4°. $\operatorname{tg} x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!} |B_{2k}| x^{2k-1} \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right)$. 26(48); 32(523)

5°. $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} |B_{2k}|}{(2k)!} x^{2k-1} \quad (|x| < \pi)$. 26(48); 32(523)

6°. $\sec x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_{2k}}{(2k)!} x^{2k} \quad \left(|x| \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$. 26(49)

7°. $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(2^{2k-1}-1)|B_{2k}| x^{2k-1}}{(2k)!} \quad (|x| < \pi)$. 26(49)

8°. $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} - \frac{8x^5}{5!} + \frac{3x^6}{6!} + \frac{56x^7}{7!} + \ldots$ 26(36);39

9°. $e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{4x^4}{4!} - \frac{31x^6}{6!} + \ldots\right)$. 26(36);39

10°. $e^{\operatorname{tg} x}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{3x^3}{3!}+\frac{9x^4}{4!}+\frac{37x^5}{5!}+\ldots$ 26(36);39

11°. $\ln\sin x=\ln x-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}-\ldots;$

$$=\ln x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k-1}B_{2k}x^{2k}}{k(2k)!}\quad (|x|<\pi).$$ 26(59);39

12°. $\ln\cos x=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}-\frac{17x^8}{2520}-\ldots;$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k-1}(2^{2k}-1)B_{2k}}{k(2k)!}x^{2k}=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^{2k}x}{k}\quad\left(|x|<\frac{\pi}{2}\right).$$ 26(59);32(524)

13°. $\ln\operatorname{tg}x=\ln x+\frac{x^2}{3}+\frac{7}{90}x^4+\frac{62}{2835}x^6+\frac{127}{18\,900}x^8+\ldots;$

$$=\ln x+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(2^{2k-1}-1)\,2^{2k}B_{2k}x^{2k}}{k(2k)!}\quad\left(|x|<\frac{\pi}{2}\right).$$ 26(59);39

3. Бесконечные произведения.

1°. $\sin x=x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$ 26(51); 36(149)

2°. $\cos x=\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right).$ 26(51); 36(149)

3°. $\cos\frac{\pi x}{4}-\sin\frac{\pi x}{4}=\prod_{k=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^k x}{2k-1}\right].$ 26(51); 43(189)

4°. $1+\sin x=$

$$=\frac{1}{8}(\pi+2x)^2\prod_{k=1}^{\infty}\left[1-\left(\frac{\pi+2x}{2k\pi}\right)^2\right]^2$$ 26(51); 66(216)

5°. $\frac{\sin\pi(x+a)}{\sin\pi a}=$

$$=\frac{x+a}{a}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{k-a}\right)\left(1+\frac{x}{k+a}\right)$$ 26(51); 66(216)

6°. $1-\frac{\sin^2 \pi x}{\sin^2 \pi a}=\prod_{k=-\infty}^{\infty}\left[1-\left(\frac{x}{k-a}\right)^2\right]$. 26 (51); 66 (216)

7°. $\sin x = x\prod_{k=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^k}\ (|x|<1)$. 26 (51); 39 (130); 66 (216)

8°. $\frac{\sin x}{x}=\prod_{k=1}^{\infty}\left[1-\frac{4}{3}\sin^2\left(\frac{x}{3^k}\right)\right]$. 26 (51); 66 (216)

4. Разложения на простейшие дроби.

1°. $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\frac{4x}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2-x^2}$. 26 (50); 43 (191); 39 (129)

2°. $\operatorname{ctg}\pi x=\frac{1}{\pi x}+\frac{2x}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^2-k^2}=$

$=\frac{1}{\pi x}+\frac{x}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{k(x-k)}$. 26 (50); 39 (129); 52 (137)

3°. $\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{2}=$

$=x^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(2k-1)^2-x^2}{(1^2-x^2)^2(3^2-x^2)^2\ldots[(2k-1)^2-x^2]^2}$. 26 (50); 52 (135)

4°. $\sec\frac{\pi x}{2}=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2k-1}{(2k-1)^2-x^2}$. 26 (50); 39 (129)

5°. $\sec^2\frac{\pi x}{2}=\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2k-1-x)^2}+\frac{1}{(2k-1+x)^2}\right\}$. 26 (50); 52 (137)

6°. $\operatorname{cosec}\pi x=\frac{1}{\pi x}+\frac{2x}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{x^2-k^2}$;

$=\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{x-k}+\frac{1}{k}\right)$. 26 (50); 39 (129); 52 (137)

7°. $\operatorname{cosec}^2\pi x=\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x-k)^2}=$

$=\frac{1}{\pi^2 x^2}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^2+k^2}{(x^2-k^2)^2}$. 26 (50); 52 (134)

5. Ортогональные и другие многочленные разложения.
А. Разложения по многочленам Чебышева.

1°. $\sin\frac{\pi}{4}x = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k J_{2k+1}\left(\frac{\pi}{4}\right) T_{2k+1}(x) \qquad (|x| \leqslant 1),$

$$|r_m(x)| \leqslant \frac{\left(\frac{\pi}{8}\right)^{2m+1}\left(1+\frac{\pi}{16m}\right)}{(2m+1)!}. \qquad 19\,(13)$$

k	$2(-1)^k J_{2k+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)$	r_k
0	0,726 375 676 693 734 663 591 187	
1	—0,019 420 029 053 201 506 305 923	$16\cdot10^{-5}$
2	0,000 151 692 922 851 073 994 812	$6\cdot10^{-7}$
3	—0,000 000 560 580 468 412 001 104	$13\cdot10^{-10}$
4	0,000 000 001 205 324 167 854 356	$17\cdot10^{-13}$
5	—0,000 000 000 001 694 139 308 710	$17\cdot10^{-16}$
6	0,000 000 000 000 001 677 809 317	$13\cdot10^{-19}$
7	—0,000 000 000 000 000 001 233 791	$8\cdot10^{-22}$
8	0,000 000 000 000 000 000 000 700	$<10^{-24}$

78 (79)

2°. $\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}T_{2k}(x) \qquad (|x| \leqslant 1).$

k	a_{2k}	r_{2k}
0	0,745 947 960 457 275 642 099 900	
1	—0,039 144 567 527 081 957 017 426	$31\cdot10^{-5}$
2	0,000 304 509 420 678 944 405 580	$12\cdot10^{-7}$
3	—0,000 001 123 574 976 796 415 956	$25\cdot10^{-10}$
4	0,000 000 002 414 039 972 413 748	$34\cdot10^{-13}$
5	—0,000 000 000 003 391 636 705 036	$34\cdot10^{-16}$
6	0,000 000 000 000 003 358 087 616	$25\cdot10^{-19}$
7	—0,000 000 000 000 000 002 468 982	$15\cdot10^{-22}$
8	0,000 000 000 000 000 000 001 400	$1\cdot10^{-24}$

78 (83)

3°. $$\cos\frac{\pi}{4}x = J_0\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_{2k}\left(\frac{\pi}{4}\right)T_{2k}(x)$$

$(|x| \leqslant 1)$,

$$J_0\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}851\,631\,913\,704\,808\,012\,700\,406\ \ldots,$$

$$|r_m(x)| \leqslant \frac{\left(\frac{\pi}{8}\right)^{2(m+1)}\left(1+\frac{\pi}{16m}\right)}{[2(m+1)]!}$$ 19 (13); 78 (85)

k	$2(-1)^k J_{2k}\left(\frac{\pi}{4}\right)$	r_{2k}
1	−0,146 436 144 390 836 863 320 797	$20\cdot10^{-4}$
2	0,001 921 449 311 814 646 796 907	$100\cdot10^{-7}$
3	−0,000 009 964 968 489 829 300 069	$28\cdot10^{-9}$
4	0,000 000 027 576 595 607 187 395	$48\cdot10^{-12}$
5	−0,000 000 000 047 399 498 081 648	$56\cdot10^{-15}$
6	0,000 000 000 000 055 495 485 415	$48\cdot10^{-18}$
7	−0,000 000 000 000 000 047 097 049	$31\cdot10^{-21}$
8	0,000 000 000 000 000 000 030 298	$16\cdot10^{-24}$
9	−0,000 000 000 000 000 000 000 015	10^{-24}

78 (85)

4°. $$\sin\frac{\pi}{2}x = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k J_{2k+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)T_{2k+1}(x)$$

$(|x| \leqslant 1)$. 18 (97); 42 (22); 5 (251)

5°. $$\cos\frac{\pi}{2}x = J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_{2k}\left(\frac{\pi}{2}\right)T_{2k}(x)$$

$(|x| \leqslant 1)$. 18 (97); 42 (22); 5 (251)

k	$J_k\left(\frac{\pi}{2}\right)$	k	$J_k\left(\frac{\pi}{2}\right)$
0	0,47200 121 577	7	0,00003 385 064
1	0,56682 408 891	8	0,00000 335 220
2	0,24970 162 914	9	0,00000 029 457
3	0,06903 588 829	10	0,00000 002 327
4	0,01399 603 981	11	0,00000 000 167
5	0,00224 535 712	12	0,00000 000 011
6	0,00029 834 760		

6°. $\sin\frac{\pi}{2}x = x\sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(2x^2-1) \qquad (|x| \leqslant 1).$

a_0	1,276 278 962	a_3	—0,000 136 587	47 (145)
a_1	—0,285 261 569	a_4	0,000 001 185	
a_2	0,009 118 016	a_5	—0,000 000 007	

7°. $\cos\frac{\pi}{2}x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(2x^2-1) \qquad (|x| \leqslant 1).$

a_0	0,472 001 216	a_3	—0,000 596 695	47 (145)
a_1	—0,499 403 258	a_4	0,000 006 704	
a_2	0,027 992 080	a_5	—0,000 000 047	

8°. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} T_{2k+1}(x) \qquad (|x| \leqslant 1).$

a_1	0,93845 067 562	a_{11}	0,00000 150 310	18 (100)
a_3	0,05717 001 507	a_{13}	0,00000 010 792	
a_5	0,00406 513 598	a_{15}	0,00000 000 775	
a_7	0,00029 161 838	a_{17}	0,00000 000 056	
a_9	0,00002 093 559	a_{19}	0,00000 000 004	

9°. $x\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}x = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} T_{2k}(x) \qquad (|x| \leqslant 1).$

a_0	1,13809 362 221	a_8	—0,00000 035 763	18 (100)
a_2	—0,13659 733 195	a_{10}	—0,00000 000 575	
a_4	—0,00147 349 212	a_{12}	—0,00000 000 009	
a_6	—0,00002 243 466			

Б. Разложения по многочленам Лежандра.

10°. $\sin\frac{\pi}{2}x = 3\cdot J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)P_1(x) - 7\cdot J_{\frac{7}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)P_3(x) +$

$+\ 11\cdot J_{\frac{11}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)P_5(x) - \ldots \qquad$ 42 (22)

$$11°.\ \cos\frac{\pi}{2}x = 1\cdot J_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)P_0(x) - 5\cdot J_{\frac{5}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)P_2(x) + 9\cdot J_{\frac{9}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)P_4(x) - \ldots \qquad 42\,(22)$$

k	$J_k\left(\frac{\pi}{2}\right)$	k	$J_k\left(\frac{\pi}{2}\right)$
0,5	0,63661 977 237	7,5	0,00001 082 285
1,5	0,40528 473 457	8,5	0,00000 100 778
2,5	0,13741 705 403	9,5	0,00000 008 384
3,5	0,03212 733 371	10,5	0,00000 000 630
4,5	0,00575 321 708	11,5	0,00000 000 043
5,5	0,00083 617 200	12,5	0,00000 000 003
6,5	0,00010 234 280		

$$12°.\ \sin x = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}P_{2k-1}(x) \qquad (|x|<1).$$

a_1	0,903 506 036 819	a_7	—0,000 007 185 201 298
a_3	—0,063 046 067 820	a_9	0,000 000 028 336 153
a_5	0,001 018 172 750	a_{11}	—0,000 000 000 071 236

$$13°.\ \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}P_{2k}(x) \qquad (|x|<1).$$

a_0	0,841 470 984 808	a_6	—0,000 093 040 172
a_2	—0,310 175 260 057	a_8	0,000 000 480 504 796
a_4	0,009 099 142 276	a_{10}	—0,000 000 001 494 193

В. Разложения по многочленам Эрмита.

$$14°.\ e\sin 2x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}H_{2k+1}(x). \qquad 26\,(412);\ 30$$

$$15°.\ e\cos 2x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}H_{2k}(x). \qquad 26\,(412);\ 30$$

6. Многочленные приближения. 1°. Серия (формулы а) —ж)) наилучших приближений для $\sin\frac{\pi}{4}x$, $|x|\leqslant 1$ (см. [78], стр. 81).

а) $\sin\frac{\pi}{4}x\approx\sum_{k=0}^{1}a_{2k+1}x^{2k+1}$, $r=15\cdot 10^{-5}$.

a_1	0,78464	a_3	—0,07768

б) $\sin\frac{\pi}{4}x\approx\sum_{k=0}^{2}a_{2k+1}x^{2k+1}$, $r=5\cdot 10^{-7}$.

a_1	0,785 394 2	a_3	—0,080 714 0	a_5	0,002 427 1

в) $\sin\frac{\pi}{4}x\approx\sum_{k=0}^{3}a_{2k+1}x^{2k+1}$, $r=12\cdot 10^{-10}$.

a_1	0,785 398 152 5	a_5	0 002 489 871 8
a_3	—0,080 745 367 2	a_7	—0,000 035 877 1

г) $\sin\frac{\pi}{4}x\approx\sum_{k=0}^{4}a_{2k+1}x^{2k+1}$, $r=17\cdot 10^{-13}$.

a_1	0,785 398 163 378 8	a_7	—0,000 036 571 416 7
a_3	—0,080 745 511 815 0	a_9	0,000 000 308 563 0
a_5	0,002 490 392 478 1		

д) $\sin\frac{\pi}{4}x\approx\sum_{k=0}^{5}a_{2k+1}x^{2k+1}$, $r=16\cdot 10^{-16}$.

a_1	0,785 398 163 397 426 5	a_7	—0,000 036 576 187 395 3
a_3	—0,080 745 512 187 669 4	a_9	0,000 000 313 333 683 3
a_5	0,002 490 394 565 299 5	a_{11}	—0,000 000 001 734 798 7

е) $\sin\frac{\pi}{4}x \approx \sum_{k=0}^{6} a_{2k+1}x^{2k+1}, \quad r = 12\cdot 10^{-19}$.

a_1	0,785 398 163 397 448 291 1	a_9	0,000 000 313 361 602 011 1
a_3	—0,080 745 512 188 280 090 2	a_{11}	—0,000 000 001 757 133 649 7
a_5	0,002 490 394 570 185 250 2	a_{13}	0,000 000 000 006 872 307 0
a_7	—0,000 036 576 204 146 593 7		

ж) $\sin\frac{\pi}{4}x \approx \sum_{k=0}^{7} a_{2k+1}x^{2k+1}, \quad r = 7\cdot 10^{-22}$.

a_1	0,785 398 163 397 448 309 603 7
a_3	—0,080 745 512 188 280 781 135 0
a_5	0,002 490 394 570 192 712 152 2
a_7	—0,000 036 576 204 182 126 908 8
a_9	0,000 000 313 361 688 869 963 8
a_{11}	—0,000 000 001 757 247 355 925 5
a_{13}	0,000 000 000 006 948 111 081 5
a_{15}	—0,000 000 000 000 020 214 431 7

2°. Серия (формулы а) —г)) наилучших приближений для $\sin\frac{\pi}{2}x$, $|x| \leqslant 1$ (формулы а)—в) см. [49], стр. 138—140).

а) $\sin\frac{\pi}{2}x \approx \sum_{k=0}^{2} a_{2k+1}x^{2k+1} \qquad (|x| \leqslant 1),$

$\varepsilon = 11\cdot 10^{-5} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0).$

a_1	1,570 626 8	a_3	—0,643 229 2	a_5	0,072 710 2

б) $\sin\frac{\pi}{2}x \approx \sum_{k=0}^{3} a_{2k+1}x^{2k+1} \qquad (|x| \leqslant 1),$

$\varepsilon = 11\cdot 10^{-7} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1{,}0).$

a_1	1,570 794 852	a_5	0,079 487 663
a_3	—0,645 920 978	a_7	—0,004 362 476

в) $\sin\frac{\pi}{2}x \approx \sum_{k=0}^{4} a_{2k+1}x^{2k+1} \qquad (|x| \leqslant 1),$

$$\varepsilon = 55\cdot 10^{-10} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1{,}0).$$

a_1	1,570 796 318 47	a_7	—0,004 673 765 57
a_3	—0,645 963 711 06	a_9	0,000 151 484 19
a_5	0,079 689 679 28		

г) $\sin\frac{\pi}{2}x \approx \sum_{k=0}^{5} a_{2k+1}x^{2k+1}.$

a_1	1,570 796 326 621 43	a_7	—0,004 681 620 239 10
a_3	—0,645 964 092 644 01	a_9	0,000 160 217 134 30
a_5	0,079 699 587 286 30	a_{11}	—0,000 003 418 172 25

3°. Серия (формулы а)—в)) приближений для $\sin x$, $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$.

а) $\sin x \approx \sum_{k=0}^{3} a_{2k+1}x^{2k+1}, \quad r = 10^{-6}.$

a_1	0,999 999 2	a_5	0,008 313 2
a_3	—0,166 656 7	a_7	—0,000 185 2

б) $\sin x \approx \sum_{k=0}^{4} a_{2k+1}x^{2k+1}, \quad r = 6\cdot 10^{-9}.$

a_1	1,000 000 002	a_7	—0,000 198 107
a_3	—0,166 666 589	a_9	0,000 002 608
a_5	0,008 333 075		

в) $\sin x \approx \sum_{k=0}^{5} a_{2k+1}x^{2k+1}.$

a_1	1,000 000 000 000	a_7	—0,000 198 407 018 014
a_3	—0,166 666 665 811	a_9	0,000 002 752 239 414 7
a_5	0,008 333 320 401	a_{11}	—0,000 000 023 840 800 41

4°. Серия (формулы а)—ж)) наилучших приближений для $\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}x}{x}$, $|x| \leqslant 1$ (см. [78], стр. 84).

а) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}x}{x}\approx\sum\limits_{k=0}^{1}a_{2k}x^{2k},\quad r=31\cdot10^{-5}.$

a_0	0,785 09	a_2	—0,078 29

б) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}x}{x}\approx\sum\limits_{k=0}^{2}a_{2k}x^{2k},\quad r=12\cdot10^{-7}.$

a_0	0, 785 397 0	a_2	—0,080 725 2	a_4	0,002 436 1

в) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}x}{x}\approx\sum\limits_{k=0}^{3}a_{2k}x^{2k},\quad r=24\cdot10^{-10}.$

a_0	0,785 398 161 0	a_4	0,002 490 007 0
a_2	—0,080 745 434 8	a_6	—0,000 035 954 4

г) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}x}{x}\approx\sum\limits_{k=0}^{4}a_{2k}x^{2k},\quad r=34\cdot10^{-13}.$

a_0	0,785 398 163 394 1	a_6	—0,000 036 572 393 5
a_2	—0,080 745 512 018 5	a_8	0,000 000 308 997 1
a_4	0,002 490 393 210 7		

д) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}x}{x}\approx\sum\limits_{k=0}^{5}a_{2k}x^{2k},\quad r=34\cdot10^{-16}.$

a_0	0,785 398 163 397 444 9	a_6	—0,000 036 576 192 123 5
a_2	—0,080 745 512 188 038 8	a_8	0,000 000 313 338 411 5
a_4	0,002 490 394 567 368 1	a_{10}	—0,000 000 001 736 518 0

е) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}x}{x}\approx\sum\limits_{k=0}^{6}a_{2k}x^{2k},\quad r=25\cdot10^{-19}.$

a_0	0,785 398 163 397 448 307 1	a_8	0,000 000 313 361 622 553 0
a_2	—0,080 745 512 188 280 539 6	a_{10}	—0,000 000 001 757 150 083 3
a_4	0,002 490 394 570 188 845 0	a_{12}	0,000 000 000 006 877 363 4
a_6	—0,000 036 576 204 158 918 9		

ж) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}x}{x}\approx\sum\limits_{k=0}^{7} a_{2k}x^{2k}, \quad r=15\cdot 10^{-22}$

a_0	0,785 398 163 397 448 309 614 2
a_2	—0,080 745 512 188 280 781 527 0
a_4	0,002 490 394 570 192 716 385 8
a_6	—0,000 036 576 204 182 147 068 8
a_8	0,000 000 313 361 688 919 243 8
a_{10}	—0,000 000 001 757 247 420 437 5
a_{12}	0,000 000 000 006 948 154 089 5
a_{14}	—0,000 000 000 000 020 225 900 5

5°. $\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\approx\sum\limits_{k=0}^{2} \bar{a}_k^4 x^k \quad (0\leqslant x\leqslant 1), \quad r_4=0,000\,137\,808.$

$\bar{a}_0^4$	1,570 643 5	$\bar{a}_1^4$	—0,643 382 57	$\bar{a}_2^4$	0,072 866 729	75 (34)

6°. $\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\approx\sum\limits_{k=0}^{4} \bar{a}_k^4 x^k \quad (0\leqslant x\leqslant 1), \quad r_4=10^{-7}.$

$\bar{a}_0^4$	1,570 796 3	$\bar{a}_3^4$	—0,004 675 262 7	75 (34)
$\bar{a}_1^4$	—0,645 964 00	$\bar{a}_4^4$	0,000 152 015 09	
$\bar{a}_2^4$	0,079 690 922			

7°. Серия (формулы а) — з)) наилучших приближений для $\cos\frac{\pi}{4}x$ ($|x|\leqslant 1$) (формулу а) см. [67], стр. 192, формулы б) — з) см. [78], стр. 86).

а) $\cos\frac{\pi}{4}x\approx\sum\limits_{k=0}^{1} a_{2k}x^{2k} \quad r=1,9215\cdot 10^{-3}.$

a_0	0,998 078 5	a_2	—0,292 893 2

б) $\cos\frac{\pi}{4}x\approx\sum\limits_{k=0}^{2} a_{2k}x^{2k} \quad r=99\cdot 10^{-7}$

a_0	0,999 990 0	a_2	—0,308 245 1	a_4	0,015 371 8

в) $\cos\frac{\pi}{4}x \approx \sum_{k=0}^{3} a_{2k}x^{2k}, \quad r = 27\cdot 10^{-9}.$

a_0	0,999 999 972	a_4	0,015 849 910
a_2	—0,308 424 251	a_6	—0,000 318 877

г) $\cos\frac{\pi}{4}x \approx \sum_{k=0}^{4} a_{2k}x^{2k}, \quad r = 47\cdot 10^{-12}.$

a_0	0,999 999 999 953	a_6	—0,000 325 938 600
a_2	—0,308 425 135 160	a_8	0,000 003 529 804
a_4	0,015 854 325 237		

д) $\cos\frac{\pi}{4}x \approx \sum_{k=0}^{5} a_{2k}x^{2k}, \quad r = 57\cdot 10^{-15}.$

a_0	0,999 999 999 999 944	a_6	—0,000 325 991 687 588
a_2	—0,308 425 137 530 042	a_8	0,000 003 590 475 595
a_4	0,015 854 344 197 125	a_{10}	—0,000 000 024 268 543

е) $\cos\frac{\pi}{4}x \approx \sum_{k=0}^{6} a_{2k}x^{2k}, \quad r = 48\cdot 10^{-18}.$

a_0	0,999 999 999 999 999 953	a_8	0,000 003 590 859 180 060
a_2	—0,308 425 137 534 037 837	a_{10}	—0,000 000 024 609 507 280
a_4	0,015 854 344 243 741 571	a_{12}	0,000 000 000 113 654 754
a_6	—0,000 325 991 886 483 649		

ж) $\cos\frac{\pi}{4}x \approx \sum_{k=0}^{7} a_{2k}x^{2k}, \quad r = 31\cdot 10^{-21}.$

a_0	0,999 999 999 999 999 999 970	a_8	0,000 003 590 860 446 028 362
a_2	—0,308 425 137 534 042 452 958	a_{10}	—0,000 000 024 611 364 034 253
a_4	0,015 854 344 243 815 419 342	a_{12}	0,000 000 000 115 005 120 719
a_6	—0,000 325 991 886 926 737 786	a_{14}	—0,000 000 000 000 385 819 025

з) $\cos\frac{\pi}{4}x \approx \sum_{k=0}^{8} a_{2k}x^{2k}, \quad r = 16\cdot 10^{-24}.$

a_0	0,999 999 999 999 999 999 999 983
a_2	—0,308 425 137 534 042 456 835 958
a_4	0,015 854 344 243 815 500 783 469
a_6	—0,000 325 991 886 927 389 313 737
a_8	0,000 003 590 860 448 587 936 703
a_{10}	—0,000 000 024 611 369 494 680 064
a_{12}	0,000 000 000 115 011 573 950 464
a_{14}	—0,000 000 000 000 389 790 244 864
a_{16}	0,000 000 000 000 000 992 804 864

8°. Серия (формулы а) — в)) наилучших приближений для $\cos\frac{\pi}{2}x$.

а) $\cos\frac{\pi}{2}x \approx \sum_{k=0}^{2} a_{2k}x^{2k}, \quad r = 5{,}968\cdot 10^{-4} \quad (|x| \leqslant 1).$

a_0	0,999 4032	a_2	—1,222 7967	a_4	0,223 9903	67 (193)

б) $\cos\frac{\pi}{2}x \approx \sum_{k=0}^{4} a_{2k}x^{2k} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \quad r = 5\cdot 10^{-8}.$

a_0	0,999 999 95	a_6	—0,020 810 46	11 (154)
a_2	—1,233 698 19	a_8	0 000 858 11	
a_4	0,253 650 64			

в) $\cos\frac{\pi}{2}x \approx \sum_{k=0}^{5} a_{2k}x^{2k}, \quad r = 7\cdot 10^{-9} \quad (|x| \leqslant 1).$

a_0	0,999 999 999 8	a_6	—0,020 862 656 4	60 (88)
a_2	—1,233 700 533 6	a_8	0,000 917 670 3	
a_4	0,253 669 314 7	a_{10}	—0,000 023 788 8	

9°. Приближения (формулы а) — б)) для $\cos x$.

а) $\cos x \approx \sum_{k=0}^{4} \bar{a}_k x^k \qquad (|x| \leqslant 1), \qquad r = 4{,}295 \cdot 10^{-5}$.

$\bar{a}_0$	0,999 958 87	$\bar{a}_3$	$1{,}159 \cdot 10^{-6}$
$\bar{a}_1$	$-2{,}5 \cdot 10^{-7}$	$\bar{a}_4$	0,039 632 11
$\bar{a}_2$	−0,499 246 63		

75 (33)

б) $\cos x \approx \sum_{k=0}^{5} a_{2k} x^{2k} \qquad (|x| < 1), \qquad r = 2 \cdot 10^{-9}$.

a_0	1,000 000 000 000	a_6	−0,001 388 885 683
a_2	−0,499 999 999 942	a_8	0,000 024 795 132
a_4	0,041 666 665 950	a_{10}	−0,000 000 269 591

10°. Приближения для $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x$ и $\operatorname{tg} x$ (формулы а) — г)).

а) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x \approx \sum_{k=0}^{8} a_{2k+1} x^{2k+1} \qquad (|x| < 1), \qquad r = 2 \cdot 10^{-10}$.

a_1	0,785 398 164 100	a_{11}	0,000 564 878 935
a_3	0,161 490 982 898	a_{13}	0,000 273 110 441
a_5	0,039 847 028 543	a_{15}	0,000 027 981 368
a_7	0,009 943 148 779	a_{17}	0,000 036 452 696
a_9	0,002 510 214 922		

б) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x \approx \sum_{k=0}^{9} a_{2k+1} x^{2k+1} \qquad (|x| < 1)$.

a_1	0,785 398 163 34	a_{11}	0,000 635 623 83
a_3	0,161 491 028 48	a_{13}	0,000 128 272 67
a_5	0,039 846 228 68	a_{15}	0,000 071 528 28
a_7	0,009 949 562 98	a_{17}	0,000 013 303 15
a_9	0,002 482 421 62	a_{19}	0,000 010 475 27

18 (117)

в) $\operatorname{tg} x \approx \sum_{k=0}^{5} a_{2k+1} x^{2k+1}, \quad r = 2{,}2 \cdot 10^{-7} \quad \left(|x| \leqslant \frac{\pi}{4}\right).$

a_1	0,999 999 8	a_7	0,057 164 8
a_3	0,333 359 1	a_9	0,012 559 5
a_5	0,132 854 1	a_{11}	0,020 373 2

г) $\operatorname{tg} x \approx \sum_{k=0}^{6} a_{2k+1} x^{2k+1}, \quad r = 2 \cdot 10^{-8} \quad \left(|x| \leqslant \frac{\pi}{4}\right).$

a_1	1,000 000 02	a_9	0,024 570 96
a_3	0,333 330 82	a_{11}	0,002 940 45
a_5	0,133 397 62	a_{13}	0,009 473 24
a_7	0,059 358 36		

11°. $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} x \approx \frac{a_{-1}}{x} + \sum_{k=0}^{4} a_{2k+1} x^{2k+1}, \quad r = 2 \cdot 10^{-10} \quad (|x| < 1).$

a_{-1}	1,273 239 544 735	a_5	—0,000 632 697 788
a_1	—0,261 799 389 768	a_7	—0,000 038 528 582
a_3	—0,010 766 029 173	a_9	—0,000 002 899 234

12°. $\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \approx \sum_{k=0}^{2} a_{2k+1} x^{2k+1}, \quad r = 10^{-6} \quad \left(|x| \leqslant \frac{\pi}{4}\right).$

a_1	0,333 335	a_3	0,022 173	a_5	0,002 327

13°. $\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \approx \sum_{k=0}^{3} a_{2k+1} x^{2k+1},$

$$r = 2{,}8 \cdot 10^{-8} \quad \left(|x| \leqslant \frac{\pi}{4}\right).$$

a_1	0,333 333 22	a_5	0,002 102 83
a_3	0,022 224 45	a_7	0,000 242 24

14°. Серия (формулы а) —г)) наилучших многочленных приближений для $x \operatorname{ctg} x$ при $|x| \leqslant \frac{\pi}{4}$;

$y=\left(\frac{4x}{\pi}\right)^2$. Их можно использовать для нахождения $\operatorname{tg} x = \frac{x}{x \operatorname{ctg} x}$ с ошибкой, не превосходящей $1{,}3r$ (см. [73], стр. 113).

а) $x \operatorname{ctg} x \approx 1{,}0012 - 0{,}2146y, \quad r = 1{,}2\cdot 10^{-3}$.

б) $x \operatorname{ctg} x \approx \sum\limits_{k=0}^{2} a_k y^k, \quad r = 1{,}8\cdot 10^{-5}$.

a_0	0,999 983	a_1	—0,205 308	a_2	—0,009 258

в) $x \operatorname{ctg} x \approx \sum\limits_{k=0}^{3} a_k y^k, \quad r = 2{,}9\cdot 10^{-7}$.

a_0	1,000 000 28	a_2	—0,008 412 46
a_1	—0,205 625 53	a_3	—0,000 563 84

г) $x \operatorname{ctg} x \approx \sum\limits_{k=0}^{4} a_k y^k, \quad r = 6\cdot 10^{-9}$.

a_0	0,999 999 994	a_3	—0,000 491 943
a_1	—0,205 616 537	a_4	—0,000 035 949
a_2	—0,008 457 395		

7. Разложения в цепные дроби.

1°. $$\sin x = \frac{x}{1+}\;\frac{x^2}{6-}\;\frac{7x^2}{10+}\;\frac{11x^2}{98-}\;\frac{551x^2}{198-}\ldots$$

$$\frac{0}{1}\quad \frac{x}{1}\quad \frac{6x}{6+x^2}\quad \frac{60x-7x^3}{60+3x^2}\quad \frac{5880x-620x^3}{5880+360x^2+11x^4}$$

. 34 (165)

2°. $$\sin x = x - \frac{x^3}{6+}\;\frac{3x^2}{10-}\;\frac{11x^2}{42+}\;\frac{25x^2}{66-}\ldots$$

$$\frac{x}{1}\quad \frac{6x-x^3}{6}\quad \frac{60x-7x^3}{60+3x^2}\quad \frac{2520x-360x^3+11x^5}{2520+60x^2}\quad \frac{166320x-22260x^3+551x^5}{166320+5460x^2+75x^4}$$

. 34 (165)

3°. $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2\,+}\,\frac{x^2}{6\,-}\,\frac{3x^2}{10\,+}\,\frac{13x^2}{126\,-}\cdots$$

$$\frac{1}{1},\quad \frac{2-x^2}{2},\quad \frac{12-5x^2}{12+x},\quad \frac{120-5x^2+3x^4}{120+4x^2},\quad \frac{15120-6900x^2+313x^4}{15120+660x^2+13x^4}$$

34 (168)

4°. $$\cos x = \frac{1}{1\,+}\,\frac{x^2}{2\,-}\,\frac{5x^2}{6\,+}\,\frac{3x^2}{50\,-}\,\frac{313x^2}{126\,+}\cdots$$

$$\frac{0}{1},\quad \frac{1}{1},\quad \frac{2}{2+x^2},\quad \frac{12-5x^2}{12+x^2},\quad \frac{600-244x^2}{600+56x^2+3x^4}$$

34 (167, 168)

5°. $$\operatorname{tg} x = \frac{x}{1\,-}\,\frac{x^2}{3\,-}\,\frac{x^2}{5\,-}\,\frac{x^2}{7\,-}\,\frac{x^2}{9\,-}\cdots\frac{x^2}{2n+1\,-}\cdots$$

$$\frac{0}{1},\quad \frac{x}{1},\quad \frac{3x}{3-x^2},\quad \frac{15x-x^3}{15-6x^2},\quad \frac{105x-10x^3}{105-45x^2+x^4},\quad \frac{945x-105x^3+x^5}{945-420x^2+15x^4}$$

34 (120)

При $|x| \leqslant \frac{\pi}{4}$ имеем $|r_7(x)| < 10^{-10}$. 34 (120); 11

6°. $$\operatorname{tg} x = x + \frac{15x^3}{15-7x^2\,+}\,\frac{x^2}{1\,+}\,\frac{9x^2}{315-28x^2\,+}\,\frac{5x^2}{1\,+}\,\frac{13x^2}{1287-44x^2\,+}\cdots + \frac{(4n+1)\,x^2}{(4n-3)(4n-1)(4n+1)-4(4n-1)\,x^2\,+}\,\frac{(4n-3)\,x^2}{1\,+}\cdots$$

34 (122)

8. Рациональные приближения.

1°. $$\sin x \approx \frac{2\left[\frac{x}{3}\sum_{k=0}^{3}(-1)^k b_{2k}\left(\frac{x}{3}\right)^{2k}\right]\left[\sum_{k=0}^{3}(-1)^k a_{2k}\left(\frac{x}{3}\right)^{2k}\right]}{\left[\sum_{k=0}^{3}(-1)^k a_{2k}\left(\frac{x}{3}\right)^{2k}\right]^2+\left[\frac{x}{3}\sum_{k=0}^{3}(-1)^k b_{2k}\left(\frac{x}{3}\right)^{2k}\right]^2}$$

$$(|x| \leqslant \pi), \quad r = 6\cdot 10^{-9}.$$

Значения a_{2k} и b_{2k} см. гл. II, § 1, п. 6,1°.

Выражения $\frac{x}{3}\sum_{k=0}^{3}(-1)^k b_{2k}\left(\frac{x}{3}\right)^{2k}$ и $\sum_{k=0}^{3}(-1)^k a_{2k}\left(\frac{x}{3}\right)^{2k}$ являются очень хорошими аппроксимациями соответственно для $\sin\frac{x}{2}$ и $\cos\frac{x}{2}$. 60(83)

$$2^\circ.\ \cos x \approx \frac{\left[\sum_{k=0}^{3}(-1)^k a_{2k}\left(\frac{x}{3}\right)^{2k}\right]^2-\left[\frac{x}{3}\sum_{k=0}^{3}(-1)^k b_{2k}\left(\frac{x}{3}\right)^{2k}\right]}{\left[\sum_{k=0}^{3}(-1)^k a_{2k}\left(\frac{x}{3}\right)^{2k}\right]^2+\left[\frac{x}{3}\sum_{k=0}^{3}(-1)^k b_{2k}\left(\frac{x}{3}\right)^{2k}\right]^2}$$

$$(|x|\leqslant\pi),\quad r=10^{-9}.$$

Значения a_{2k} и b_{2k} см. гл. II, § 1, п. 6,1°. 60(83)

$$3^\circ.\ \cos x\approx\frac{\sum_{k=0}^{6}\bar a_k x^k}{g(x)}\qquad(|x|\leqslant 1),\quad r=2{,}58486\cdot 10^{-8},$$

$$g(x)=1+2{,}828421929x^2-2x^4+2{,}828421929x^6+x^8.$$

$\bar a_0$	1,002 584 8	$\bar a_4$	1,427 635 5
$\bar a_1$	$3\cdot 10^{-7}$	$\bar a_5$	$3{,}2\cdot 10^{-7}$
$\bar a_2$	2,201 263 5	$\bar a_6$	0,610 635 04
$\bar a_3$	$2\cdot 10^{-7}$		

75 (33)

$$4^\circ.\ z(x)=\cos\frac{\pi}{1+x^{\frac{1}{2}}}\approx\frac{-1-4x+5x^2}{1+8x+6x^2},$$

$$r=0{,}003\quad(0\leqslant x\leqslant 1).\qquad 48(68)$$

Примечание. $z(x^{-1})=-z(x)$, что может быть использовано для получения значений функции при $1\leqslant x<\infty$.

$$5^\circ.\ z(x)=\cos\frac{\pi}{1+x^{\frac{1}{2}}}\approx\frac{-1-4{,}828\eta+7{,}866\eta^2-2{,}038\eta^3}{1+5{,}560\eta-4{,}985\eta^2+0{,}385\eta^3},$$

$$\eta=\frac{x}{0{,}16+0{,}84x},\quad r=0{,}00017\qquad(0\leqslant x\leqslant 1).\qquad 50(47)$$

6°. $$\operatorname{tg} x \approx \frac{2\left[\frac{x}{3}\sum_{k=0}^{3}(-1)^k b_{2k}\left(\frac{x}{3}\right)^{2k}\right]\left[\sum_{k=0}^{3}(-1)^k a_{2k}\left(\frac{x}{3}\right)^{2k}\right]}{\left[\sum_{k=0}^{3}(-1)^k a_{2k}\left(\frac{x}{3}\right)^{2k}\right]^2-\left[\frac{x}{3}\sum_{k=0}^{3}(-1)^k b_{2k}\left(\frac{x}{3}\right)^{2k}\right]^2}$$

$$(|x| \leqslant \pi), \quad r = 7\cdot 10^{-8}.$$

Значения a_{2k} и b_{2k} см. гл. II, § 1, п. 6,1°. 60 (83, 84)

7°. $\operatorname{tg} x \approx \dfrac{945x - 105x^3 + x^5}{945 - 420x^2 + 15x^4}$, $r = 2\cdot 10^{-8}$ $\left(|x| \leqslant \dfrac{\pi}{4}\right)$ 34 (162)

8°. $$\operatorname{tg} \pi x \approx \frac{x\sum_{k=0}^{2} a_k x^{2k}}{\sum_{k=0}^{3} b_k x^{2k}} \qquad (|x| < 1).$$

a_0	0,318 309 886 184	b_0	0,101 321 183 642
a_1	—0,380 799 109 526	b_1	—0,454 545 454 545
a_2	0,062 638 942 788	b_2	0,199 385 947 497
		b_3	—0,009 370 763 928

9°. $$2\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\frac{x}{\pi}}{\sum_{k=0}^{4} a_k\left(\frac{x}{\pi}\right)^{2k}} \qquad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}\right).$$ 7 (7)

a_0	1,273 239 544 731	a_3	0,000 009 877 325
a_1	0,065 449 846 718	a_4	0,000 000 158 336
a_2	0,000 672 881 123		

7 (8)

10°. $$\operatorname{tg} x = x\frac{a_0 + (a_1 + a_2x^2)x^2}{a_0 + [a_3 + (a_4 + a_5x^2)x^2]x^2} \qquad \left(0 \leqslant x < \frac{\pi}{4}\right)$$

a_0	0,500 000 000	a_3	—0,227 272 727
a_1	—0,060 606 060	a_4	0,010 101 010
a_2	0,001 010 101	a_5	—0,000 048 100

3 (290)

9. Формулы для комбинаций тригонометрических функций с гиперболическими и показательными.

1°. $y_1 = \operatorname{ch} x \cos x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-4)^k x^{4k}}{(4k)!}$.

$$y_1 \approx \sum_{k=0}^{3} a_{4k} x^{4k} \qquad \left(|x| \leqslant \frac{\pi}{2}\right), \quad r = 10^{-10}.$$

a_0 a_4	0,999 999 999 9 — 1,014 678 027 4	a_8 a_{12}	0, 014 708 143 4 — 0, 000 030 116 0	60 (95)

2°. $y_2 = \operatorname{ch} x \sin x + \operatorname{sh} x \cos x = 2 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-4)^k x^{4k+1}}{(4k+1)!}$.

$$y_2 \approx \sum_{k=0}^{3} a_{4k+1} x^{4k+1} \qquad \left(|x| \leqslant \frac{\pi}{2}\right), \quad r = 2 \cdot 10^{-10}.$$

a_1 a_5	3,141 592 653 6 — 0,637 541 009 2	a_9 a_{13}	0,005 134 114 0 0,000 007 279 8	60 (95)

3°. $y_3 = \operatorname{sh} x \sin x = 2 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-4)^k x^{4k+2}}{(4k+2)!}$.

$$y_3 \approx \sum_{k=0}^{2} a_{4k+2} x^{4k+2} \qquad \left(|x| \leqslant \frac{\pi}{2}\right), \quad r < 10^{-8}.$$

a_2 a_6	2,467 401 010 8 — 0,166 907 130 8	a_{10}	0,000 805 034 8	60 (95)

4°. $y_4 = \operatorname{ch} x \sin x - \operatorname{sh} x \cos x = 4 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-4)^k x^{4k+3}}{(4k+3)!}$.

$$y_4 \approx \sum_{k=0}^{2} a_{4k+3} x^{4k+3} \qquad \left(|x| \leqslant \frac{\pi}{2}\right), \quad r = 3 \cdot 10^{-9}.$$

a_3 a_7	2,583 856 371 2 — 0,074 907 916 4	a_{11}	0,000 230 026 4	60 (95)

5°. $e^{\frac{\pi}{2}x}\sin\frac{\pi}{2}x=\frac{1}{2}(y_2+y_4)+y_3.$

Значения y_2, y_3, y_4 см. 2°, 3°, 4°. 60 (96)

6°. $e^{\frac{\pi}{2}x}\cos\frac{\pi}{2}x=\frac{1}{2}(y_2-y_4)+y_1.$

Значения y_1, y_2, y_4 см. 1°, 2°, 4°. 60 (96)

§ 2. Обратные тригонометрические функции

1. Общие сведения. 1°. Определение обратных тригонометрических функций:

Если $x=\sin y$, то $y=\operatorname{Arcsin} x$ (арксинус).
Если $x=\cos y$, то $y=\operatorname{Arccos} x$ (арккосинус).
Если $x=\operatorname{tg} y$, то $y=\operatorname{Arctg} x$ (арктангенс).
Если $x=\operatorname{ctg} y$, то $y=\operatorname{Arcctg} x$ (арккотангенс).

Функции $\operatorname{Arcsin} x$ и $\operatorname{Arccos} x$ имеют действительные значения, если $-1\leqslant x\leqslant+1$; функции $\operatorname{Arctg} x$ и $\operatorname{Arcctg} x$ имеют действительные значения при любом действительном x. Обратные тригонометрические функции — многозначные функции.

Главные значения обратных тригонометрических функций обозначаются через $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$. Они связаны с любыми значениями соответствующих функций соотношениями:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arcsin} x &= n\pi+(-1)^n\arcsin x,\\
\operatorname{Arccos} x &= 2\pi n\pm\arccos x,\\
\operatorname{Arctg} x &= \operatorname{arctg} x+\pi n,\\
\operatorname{Arcctg} x &= \operatorname{arcctg} x+\pi n.
\end{aligned}$$

Областью определения функции $\arcsin x$ является отрезок $[-1,\ 1]$, а областью значений — отрезок $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Областью определения функции $\arccos x$ является отрезок $[-1,\ 1]$, а областью значений — отрезок $[0,\ \pi]$.

Областью определения функции $\operatorname{arctg} x$ является интервал $(-\infty, +\infty)$, а областью значений — интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Областью определения функции $\operatorname{arcctg} x$ является интервал $(-\infty, +\infty)$, а областью значений — интервал $(0, \pi)$.

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arcctg} x = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi.$$

2°. Функциональные соотношения.

$\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$ — нечетные функции.

$\arcsin x \quad = \operatorname{sign} x \cdot \arcsin |x|.$

$\operatorname{arctg} x \quad = \operatorname{sign} x \cdot \operatorname{arctg} |x|.$

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$

$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$

3°. Соотношения между различными обратными тригонометрическими функциями.

а) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. 22 (198)

б) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$. 22 (198)

в) $\arcsin x = \operatorname{sign} x \arccos \sqrt{1-x^2}$;

$$= \operatorname{sign} x \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{1-x^2}\right); \qquad 22\,(201)$$

эта формула приводит к интервалу $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

г) $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (|x|<1).$ 22 (200)

д) $\arcsin x = \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi \qquad (-1 \leqslant x < 0);$

$$= \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \qquad (0 < x \leqslant 1). \qquad 22\,(203)$$

е) $\arccos x = \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2} \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 0);$

$$= \arcsin \sqrt{1-x^2} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1). \qquad 22\,(202)$$

ж) $\arccos x = \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ $\quad (-1 \leqslant x < 0);$

$= \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ $\quad (0 < x \leqslant 1).$ 22 (202)

з) $\arccos x = \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad (-1 \leqslant x < 1).$ 22 (200)

и) $\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad (|x| < \infty).$ 22 (200)

к) $\operatorname{arctg} x = -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad (x \leqslant 0);$

$= \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad (x \geqslant 0).$ 22 (202)

л) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} - \pi$ $\quad (x < 0);$

$= \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$ $\quad (x > 0).$ 22 (202)

м) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{sign} x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{|x|} \right);$

эта формула может быть использована для приведения $\operatorname{arctg} x$ к интервалу $(-1, 1)$. 18 (110)

н) $\operatorname{arcctg} x = \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad (x < 0);$

$= \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad (x > 0).$ 22 (203)

о) $\operatorname{arcctg} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$ 26 (61)

п) $\operatorname{arcctg} x = \pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ $\quad (x < 0);$

$= \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ $\quad (x > 0).$ 22 (203)

р) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ $\quad (x < 0);$

$= \frac{\pi}{2}$ $\quad (x > 0).$ 26 (63); 9

с) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = -\frac{3}{4}\pi$ $\quad (x < -1);$

$= \frac{\pi}{4}$ $\quad (x > -1);$ 26 (63) так как при $|x|>1$ имеем $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$, то эта формула приводит к интервалу $(-1, 1)$.

т) Дополнительное соотношение

$$\arcsin x = 3 \arcsin \bar{x},$$

где $\bar{x}$ — корень уравнения

$$4\bar{x}^3 - 3\bar{x} + x = 0, \tag{*}$$

$$0{,}966 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$0{,}4227 \leqslant \bar{x} \leqslant 0{,}5.$$

Эту формулу можно использовать для вычисления $\arcsin x$ при x, близких к 1, решая уравнение (*) методом Ньютона [60], стр. 92.

4°. Тригонометрические операции над обратными тригонометрическими функциями.

$\sin(\arcsin x) = x$	$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$
$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$	$\cos(\arccos x) = x$
$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$	$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$
$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}$	$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$

22 (195)

5°. Выполнение обратных тригонометрических операций над тригонометрическими функциями.

а) $\arcsin(\sin x) = x - 2n\pi \qquad \left[2n\pi - \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right];$

$= -x + (2n+1)\pi \left[(2n+1)\pi - \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant (2n+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right]$

б) $\arccos(\cos x) = x - 2n\pi \qquad [2n\pi \leqslant x \leqslant (2n+1)\pi];$

$= -x + 2(n+1)\pi \; [(2n+1)\pi \leqslant x \leqslant 2(n+1)\pi].$

в) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x - n\pi \qquad \left[n\pi - \frac{\pi}{2} < x < n\pi + \frac{\pi}{2}\right].$

г) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x - n\pi \qquad [n\pi < x < (n+1)\pi].$ 26 (60)

6°. Связь между обратными тригонометрическими функциями, обратными гиперболическими функциями и логарифмом.

а) $\arcsin x = \frac{1}{i} \ln\left(ix + \sqrt{1-x^2}\right) = \frac{1}{i} \operatorname{Arsh}(ix).$

б) $\arccos x = \frac{1}{i} \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = \frac{1}{i} \operatorname{Arch} x.$

в) $\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+ix}{1-ix} = \frac{1}{i} \operatorname{Arth}(ix).$

г) $\operatorname{arcctg} x = \frac{1}{2i} \ln \frac{ix-1}{ix+1} = i \operatorname{Arcth}(ix).$ 26 (60)

2. Степенные разложения.

1°. $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x = x + \frac{1}{2\cdot 3} x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5} x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} x^7 + \ldots;$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2 (2k+1)} x^{2k+1} =$$

$$= xF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right) \qquad (|x|<1).$$ 26 (64); 32 (479)

2°. $$\arccos x = \sqrt{\frac{1-x}{2}} \left[2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{(1-x)^k}{2^k\left(k+\frac{1}{2}\right)}\right].$$

3°. $$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \qquad (|x|<1).$$ 26 (64); 32 (479)

4°. $\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1+x^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^k$

$(|x|<\infty)$. 26 (64); 39 (122)

5°. $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)\,x^{2k+1}}$

$(|x|\geqslant 1)$. 26 (64); 39 (122)

6°. $\operatorname{arcsec} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2\cdot 3x^3} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5x^5} - \ldots;$

$= \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!\,x^{-(2k+1)}}{(k!)^2\cdot 2^{2k}\cdot(2k+1)};$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{1}{x^2}\right)$

$(|x|>1)$. 26 (64); 39 (122)

7°. $(\arcsin x)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}(k!)^2 x^{2k+2}}{(2k+1)!\,(k+1)}$

$(|x|<1)$. 26 (64); 39 (122)

8°. $(\arcsin x)^3 = x^3 + \frac{3!}{5!}3^2\left(1+\frac{1}{3^2}\right)x^5 +$

$+ \frac{3!}{7!}\cdot 3^2\cdot 5^2\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right)x^7 + \ldots$

$(|x|\leqslant 1)$. 26 (65); 39 (122); 43 (188)

9°. $e^{\arcsin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{5x^4}{4!} + \ldots.$ 26 (37); 39 (126)

10°. $e^{\operatorname{arctg} x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{7x^4}{4!} - \ldots$ 26 (37); 39 (126)

3. Ортогональные и другие многочленные разложения.
А. Разложения по многочленам Чебышева.

1°. $\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} T_{2k+1}(\sqrt{2}x) \qquad \left(|x|\leqslant \sin\frac{\pi}{4}\right).$

a_1	0,762 759 763 50	a_{13}	0,000 000 312 58	
a_3	0,020 869 237 57	a_{15}	0,000 000 043 09	
a_5	0,001 586 931 63	a_{17}	0,000 000 006 11	18 (108)
a_7	0,000 160 822 75	a_{19}	0,000 000 000 88	
a_9	0,000 018 691 07	a_{21}	0,000 000 000 13	
a_{11}	0,000 002 354 06	a_{23}	0,000 000 000 02	

2°. $\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} T_{2k+1}\left(x \operatorname{cosec} \frac{\pi}{8}\right) \quad \left(|x| \leqslant \sin \frac{\pi}{8}\right)$.

a_1	0,390 105 751 22	a_9	0,000 000 028 59	18 (108)
a_3	0,002 547 040 01	a_{11}	0,000 000 000 83	
a_5	0,000 045 198 32	a_{13}	0,000 000 000 03	
a_7	0,000 001 062 70			

3°. $\arcsin x = x \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k (4x^2 - 1) \quad \left(|x| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k (4x^2 - 1) \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 47 (145)

a_0	1,051 231 959	a_5	0,000 005 881
a_1	0,054 946 487	a_6	0,000 000 777
a_2	0,004 080 631	a_7	0,000 000 107
a_3	0,000 407 890	a_8	0,000 000 015
a_4	0,000 046 985	a_9	0,000 000 002

4°. $\operatorname{arctg} x = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{p^{2k+1}}{2k+1} \cdot T_{2k+1}(x) =$

$= \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} T_{2k+1}(x) \quad (|x| \leqslant 1)$,

$\frac{2p}{1-p^2} = 1, \quad p = \sqrt{2} - 1 \approx 0,41\ldots,$ 19 (14)

$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{2p^{2k+1}}{2k+1}$.

a_1	0,828 427 124 75	a_{13}	0,000 001 625 56	18 (111)
a_3	—0,047 378 541 24	a_{15}	0,000 000 241 71	
a_5	0,004 877 323 53	a_{17}	0,000 000 036 59	
a_7	—0,000 597 726 02	a_{19}	—0,000 000 005 61	
a_9	0,000 079 763 89	a_{21}	0,000 000 000 84	
a_{11}	—0,000 011 197 08	a_{23}	—0,000 000 000 12	

$$5^\circ.\ \operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} T_{2k+1}\left(x \operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}\right) \qquad \left(|x| \leqslant \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right).$$

a_1	0,397 824 734 76	a_9	0,000 000 108 33	18(111)
a_3	—0,005 246 795 04	a_{11}	—0,000 000 003 51	
a_5	0,000 124 557 22	a_{13}	0,000 000 000 12	
a_7	—0,000 003 520 18			

$$6^\circ.\ \operatorname{arctg} x = x\sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(2x^2-1) \qquad (|x| \leqslant 1).$$

При $|x|>1$ следует пользоваться формулой $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$.

a_0	0,881 373 587	a_6	0,000 003 821	47(145)
a_1	—0,105 892 925	a_7	—0,000 000 570	
a_2	0,011 135 843	a_8	0,000 000 086	
a_3	—0,001 381 195	a_9	—0,000 000 013	
a_4	0,000 185 743	a_{10}	0,000 000 002	
a_5	—0,000 026 215			

$$7^\circ.\ \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\sqrt{2}-1)^{2k+1}}{2k+1} T_{2k+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$(0 \leqslant x < \infty). \qquad 63\,(16)$$

$$8^\circ.\ \operatorname{arctg}\frac{x}{a} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k R^{2k+1}}{2k+1} T_{2k+1}(x),$$

$$R = (a^2+1)^{\frac{1}{2}} \qquad (|x| < 1). \qquad 63\,(16)$$

Ряд сходится для всех значений a в правой половине плоскости, за исключением линии, соединяющей точки $a = \pm i$;

$$r_n \approx \frac{2\,|R^{2n+3}|}{(2n+3)\,|1-R^2|}.$$

$$9^\circ.\ \operatorname{arctg}(x \operatorname{tg} 2\theta) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \operatorname{tg}^{2k+1}\theta}{2k+1} T_{2k+1}(x)$$

$$(|x| \leqslant 1), \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{4}, \quad \varepsilon_{n-1} = \operatorname{tg}^{2n}\theta. \qquad 56\,(44)$$

О вычислении по этой формуле см. [56], стр. 44 и след. Практический способ вычислений, разработанный на основе этой формулы (при $n=9$ и $\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}\frac{\pi}{48}$) см. п. 4, 10°.

Б. Разложение по многочленам Лежандра.

10°. $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}x=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}P_{2k+1}(x)\qquad(|x|<1).$

a_1	0,750 000 000 000	a_{13}	0,000 000 933 713
a_3	0,031 941 517 568	a_{15}	0,000 000 137 799
a_5	0,003 042 677 300	a_{17}	0,000 000 020 740
a_7	0,000 359 433 936	a_{19}	0,000 000 003 169
a_9	0,000 046 941 925	a_{21}	0,000 000 000 492
a_{11}	0,000 006 496 677		

4. Приближения с помощью многочленов (и квадратного корня).

1°. $\arcsin x\approx\sum_{k=0}^{5}a_{2k+1}x^{2k+1}\qquad(|x|<0{,}966),$

при $|x|<\frac{1}{2}\qquad r=3\cdot10^{-8}.$

a_1	0,999 999 9711	a_7	0,045 938 779 8	60 (91)
a_3	0,166 669 8337	a_9	0,022 316 969 3	
a_5	0,074 901 4744	a_{11}	0,044 856 984 6	

2°. $\arcsin x\approx\sum_{k=0}^{9}a_{2k+1}x^{2k+1}\qquad\left(|x|<\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$

a_1	1	a_{11}	0,034 242 560 0
a_3	0,166 666 844	a_{13}	—0,033 161 216 0
a_5	0,074 992 448 0	a_{15}	0,143 654 912
a_7	0,044 792 576 0	a_{17}	—0,176 160 768
a_9	0,028 669 952 0	a_{19}	0,134 217 728

3°. $\arcsin x \approx \sum_{k=0}^{10} a_{2k+1} x^{2k+1} \qquad \left(|x| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$

a_1	1,000 000 000 372	a_{13}	0,060 563 816 911
a_3	0,166 666 600 550	a_{15}	—0,124 609 821 872
a_5	0,075 003 446 490	a_{17}	0,289 558 388 282
a_7	0,044 560 473 601	a_{19}	—0,313 624 467 676
a_9	0,031 466 212 165	a_{21}	0,182 869 189 956
a_{11}	0,013 758 605 250		

4°. $\arcsin x \approx \frac{\pi}{2} - \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{4} a_k (1-x)^k$

$(0{,}966 \leqslant x \leqslant 1{,}0), \quad r = 3 \cdot 10^{-9}.$

a_0	1,414 213 562 5	a_3	0,007 848 558 3
a_1	0,117 851 094 8	a_4	0,003 044 958 4
a_2	0,026 518 600 7		

60(91)

5°. Полагаем: $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \sqrt{1-x}\,\psi(x)$. Приводится серия (формулы а) —д)) многочленов наилучшего приближения степени k, $3 \leqslant k \leqslant 7$, для $\psi(x)$ на (0,1) (см. [49], стр. 159—163).

а) $\psi(x) \approx \sum_{k=0}^{3} a_k x^k, \qquad r < 7 \cdot 10^{-5}.$

a_0	1,570 728 8	a_2	0,074 261 0
a_1	—0,212 114 4	a_3	—0,018 729 3

б) $\psi(x) \approx \sum_{k=0}^{4} a_k x^k, \qquad r < 8 \cdot 10^{-6}.$

a_0	1,570 787 86	a_3	—0,035 756 63
a_1	—0,214 124 53	a_4	0,008 648 84
a_2	0,084 666 49		

в) $\psi(x) \approx \sum_{k=0}^{5} a_k x^k, \qquad r < 1{,}2 \cdot 10^{-6}$.

a_0	1,570 795 207	a_3	—0,044 958 884
a_1	—0,214 512 362	a_4	0,019 349 939
a_2	0,087 876 311	a_5	—0,004 337 769

г) $\psi(x) \approx \sum_{k=0}^{6} a_k x^k, \qquad r < 1{,}5 \cdot 10^{-7}$.

a_0	1,570 796 1728	a_4	0,026 899 9482
a_1	—0,214 585 2647	a_5	—0,011 146 2294
a_2	0,088 755 6286	a_6	0,002 295 9648
a_3	—0,048 802 5043		

д) $\psi(x) \approx \sum_{k=0}^{7} a_k x^k, \qquad r < 2{,}3 \cdot 10^{-8}$.

a_0	1,570 796 3050	a_4	0,030 891 8810
a_1	—0,214 598 8016	a_5	—0,017 088 1256
a_2	0,088 978 9874	a_6	0,006 670 0901
a_3	—0,050 174 3046	a_7	—0,001 262 4911

6°. Приводится серия (формулы а) — е)) многочленов наилучшего приближения для $y = \operatorname{arctg} x$ на отрезке $|x| \leqslant 1$; r дается для интервала $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Заметим, что каждое приближенное равенство $\operatorname{arctg} x \approx \approx \sum_{k=0}^{m} a_{2k+1} x^{2k+1}$ при $|x| \leqslant 1$ приводит к равенству той же точности $\operatorname{arctg} x \approx \frac{\pi}{4} + \sum_{k=0}^{m} a_{2k+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2k+1}$ для интервала $0 < x < \infty$ (см. [49], стр. 132—137).

а) $\operatorname{arctg} x \approx \sum_{k=0}^{2} a_{2k+1} x^{2k+1}, \qquad r = 7 \cdot 10^{-4}$.

a_0	0,995 354
a_3	—0,288 679
a_5	0,079 331

б) $\operatorname{arctg} x \approx \sum_{k=0}^{3} a_{2k+1} x^{2k+1}, \qquad r = 8 \cdot 10^{-5}.$

a_1	0,999 215 0	a_5	0,146 276 6
a_3	—0,321 181 9	a_7	—0,038 992 9

в) $\operatorname{arctg} x \approx \sum_{k=0}^{4} a_{2k+1} x^{2k+1}, \qquad r = 12 \cdot 10^{-6}.$

a_1	0,999 866 0	a_7	—0,085 133 0
a_3	—0,330 299 5	a_9	0,020 835 1
a_5	0,180 141 0		

г) $\operatorname{arctg} x \approx \sum_{k=0}^{5} a_{2k+1} x^{2k+1}, \qquad r = 18 \cdot 10^{-7}.$

a_1	0,999 977 26	a_7	—0,116 432 87
a_3	—0,332 623 47	a_9	0,052 653 32
a_5	0,193 543 46	a_{11}	—0,011 721 20

д) $\operatorname{arctg} x \approx \sum_{k=0}^{6} a_{2k+1} x^{2k+1}, \qquad r = 25 \cdot 10^{-8}.$

a_1	0,999 996 115	a_9	0,079 626 318
a_3	—0,333 173 758	a_{11}	—0,033 606 269
a_5	0,198 078 690	a_{13}	0,006 812 411
a_7	—0,132 335 096		

е) $\operatorname{arctg} x \approx \sum_{k=0}^{7} a_{2k+1} x^{2k+1}, \qquad r = 4 \cdot 10^{-8}.$

a_1	0,999 999 332 9	a_9	0,096 420 044 1
a_3	—0,333 298 560 5	a_{11}	—0,055 909 886 1
a_5	0,199 465 359 9	a_{13}	0,021 861 228 8
a_7	—0,139 085 335 1	a_{15}	—0,004 054 058 0

7°. $\operatorname{arctg} x \approx \sum_{k=0}^{4} a_{2k+1} x^{2k+1}$ $\left(|x| < \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \approx 0{,}268\right)$, $r = 2^{-32}$.

a_1	0,999 999 998 43	a_7	—0,141 734 606 13
a_3	—0,333 332 893 64	a_9	0,094 919 549 52
a_5	0,199 965 347 80		

7 (12)

8°. $\operatorname{arctg} x \approx \sum_{k=0}^{8} a_{2k+1} x^{2k+1}$ $(|x| \leqslant 1)$, $r = 5 \cdot 10^{-8}$.

a_1	1,000 000 00	a_{11}	—0,074 869 25
a_3	—0,333 330 61	a_{13}	0,042 485 76
a_5	0,199 923 55	a_{15}	—0,015 941 63
a_7	—0,142 015 62	a_{17}	0,002 818 05
a_9	0,106 327 94		

11 (166)

9°. $\operatorname{arctg} x \approx \sum_{k=0}^{10} a_{2k+1} x^{2k+1}$ $(|x| \leqslant 1)$.

a_1	0,999 999 995 3	a_{13}	0,064 702 992 4
a_3	—0,333 332 924 8	a_{15}	—0,041 172 074 5
a_5	0,199 989 259 0	a_{17}	0,019 743 375 4
a_7	—0,142 724 394 2	a_{19}	—0,006 073 876 5
a_9	0,110 179 121 7	a_{21}	0,000 876 609 5
a_{11}	—0,086 789 919 7		

10°. $\operatorname{arctg} x \approx \sum_{k=0}^{8} a_{2k+1} x^{2k+1}$ $\left(0 \leqslant x < \operatorname{tg} \frac{\pi}{24}\right)$, $r < 8 \cdot 10^{-22}$.

a_1	1,0
a_3	—0,333 333 333 333 333 331 607
a_5	0,199 999 999 999 998 244 448
a_7	—0,142 857 142 856 331 306 529
a_9	0,111 111 110 907 793 967 393
a_{11}	—0,090 909 060 963 367 763 707 3
a_{13}	0,076 920 407 324 915 408 132 0
a_{15}	—0,066 524 822 941 310 827 790 5
a_{17}	0,054 672 100 939 593 880 694 1

69 (271)

Правила вычисления $\operatorname{arctg} x$ для любого $x>0$. Интервал $(0, \infty)$ подразделяется на семь интервалов: $0 \leqslant u < \operatorname{tg}\frac{\pi}{24}$, $\operatorname{tg}\frac{(2j-3)\pi}{24} \leqslant u < \frac{\operatorname{tg}(2j-1)\pi}{24}$ для $j=2, 3, 4, 5, 6$ и $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{24} \leqslant u < \infty$. Для $|x|$ в первом интервале следует пользоваться 10°. Для $|x|$ в $(j+1)$-м интервале $(j=1, 2, 3, 4, 5)$ следует пользоваться формулой

$$\operatorname{arctg}|x| = \frac{j\pi}{12} + \operatorname{arctg} t_j,$$

где

$$t_j = \frac{|x| - \operatorname{tg}\frac{j\pi}{12}}{1 + |x| \operatorname{tg}\frac{j\pi}{12}}.$$

Для вычисления $\operatorname{arctg} t_j$ следует пользоваться 10°. Для значений $|x|$ в седьмом интервале

$$\operatorname{arctg}|x| = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{|x|} \qquad \left(\frac{1}{|x|} \leqslant \operatorname{tg}\frac{\pi}{24}\right).$$

j	$\operatorname{tg}\frac{j\pi}{24}$
1	0,131 652 497 587 395 853 472
2	0,267 949 192 431 122 706 473
3	0,414 213 562 373 095 048 802
4	0,577 350 269 189 625 764 509
5	0,767 326 987 978 960 342 923
6	1,000 000 000 000 000 000 000
7	1,303 225 372 841 205 755 868
8	1,732 050 807 568 877 293 527
9	2,414 213 562 373 095 048 802
10	3,732 050 807 568 877 293 527
11	7,595 754 112 725 150 440 526
$\frac{\pi}{2} = 1,570\,796\,326\,794\,896\,619\,231$	

69 (272)

5. Разложения в цепные дроби.

1°. $$e^{2\nu \operatorname{arcctg} x} = 1 + \frac{2\nu}{x-\nu+} \frac{\nu^2+1}{3x} + \frac{\nu^2+4}{5x} + \ldots + \frac{\nu^2+n^2}{(2n+1)x} + \ldots$$ 34 (106)

2°. $$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1}\;+\;\frac{x^2}{3}\;+\;\frac{4x^2}{5}\;+\;\frac{9x^2}{7}\;+\;\frac{16x^2}{9}\;+\ldots+\frac{n^2x^2}{2n+1}+\ldots\,.$$

$$\frac{0}{1}\quad \frac{x}{1}\quad \frac{3x}{3+x^2}\quad \frac{15x+4x^3}{15+9x^2}\quad \frac{105x+55x^3}{105+90x^2+9x^4}\quad \frac{945x+735x^3+64x^5}{945+1050x^2+225x^4} \qquad 34\,(114)$$

Дробь сходится на всей плоскости комплексного переменного x, исключая полуинтервалы мнимой оси $(-i\infty, -i]$, $[i, i\infty)$. При этом для действительных значений x имеет место цепь неравенств

$$\frac{3x}{3+x^2} \leqslant \frac{105x+55x^3}{105+90x^2+9x^4} \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{arctg} x \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant \frac{945x+735x^3+64x^5}{945+1050x^2+225x^4} \leqslant \frac{15x+4x^3}{15+9x^2} \leqslant x. \qquad 34\,(115)$$

3°. $$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3}\;+\;\frac{9x^2}{5}\;+\;\frac{4x^2}{7}\;+\;\frac{25x^2}{9}\;+\ldots+\frac{(2n+1)^2x^2}{4n+1}+\frac{4n^2x^2}{4n+3}+\ldots$$

$$\frac{x}{1}\quad \frac{3x-x^3}{3}\quad \frac{15x+4x^3}{15+9x^2}\quad \frac{105x+40x^3-4x^5}{105+75x^2}$$

Дробь сходится на всей плоскости комплексного переменного x, исключая полуинтервалы мнимой оси $(-i\infty, -i]$, $[i, i\infty)$. 34(115)

4°. $$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{1-x^2}\;+\;\frac{x^2}{3}\;+\;\frac{4x^2}{5(1-x^2)}\;+\;\frac{9x^2}{7}\;+\ldots+\frac{4n^2x^2}{(4n+1)(1-x^2)}+\frac{(2n+1)^2x^2}{4n+3}+\ldots\,. \qquad 34\,(116)$$

$$\frac{0}{1}\quad \frac{x}{1-x^2}\quad \frac{3x}{3-2x^2}\quad \frac{15x-11x^3}{15-21x^2+6x^4}\quad \frac{105x-50x^3}{105-120x^2+24x^4}$$

Дробь сходится на всей плоскости комплексного переменного x, исключая полуинтервалы действительной оси $(-\infty, -1]$ и $[1, \infty)$.

5°. $$\sqrt{1-x^2}\arcsin x = x - \frac{x^3}{3(1-x^2)+}\,\frac{9x^2}{5+}\,\frac{4x^2}{7(1-x^2)+}\cdots$$
$$\cdots+\frac{(2n+1)^2x^2}{4n+1+}\,\frac{4n^2x^2}{(4n+3)(1-x^2)+}\cdots \qquad 34\,(117)$$

6°. $$\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{x+}\,\frac{1-x^2}{3x+}\,\frac{4(1-x^2)}{5x+}\,\frac{9(1-x^2)}{7x+}\cdots$$
$$\frac{0}{1}\quad \frac{1}{x}\quad \frac{3x}{1+2x^2}\quad \frac{4+11x^2}{9x+6x^3}\quad \frac{55x+50x^3}{9+72x^2+24x^4}$$
$$\cdots+\frac{n^2(1-x^2)}{(2n+1)x+}\cdots. \qquad 34\,(117)$$

7°. $$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{1-}\,\frac{1\cdot 2x^2}{3-}\,\frac{1\cdot 2x^2}{5-}\cdots$$
$$\cdots-\frac{(2n-1)\,2nx^2}{4n-1-}\,\frac{(2n-1)\,2nx^2}{4n+1-}\cdots. \qquad 34\,(118)$$

8°. $$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1+x^2-}\,\frac{1\cdot 2x^2}{3-}\,\frac{1\cdot 2x^2}{5(1+x^2)-}\cdots$$
$$\cdots-\frac{(2n-1)\,2nx^2}{4n-1-}\,\frac{(2n-1)\,2nx^2}{(4n+1)(1+x^2)-}\cdots \qquad 34\,(119)$$

9°. $$\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{1-}\,\frac{1\cdot 2(1-x^2)}{3-}\,\frac{1\cdot 2(1-x^2)}{5-}\cdots$$
$$\cdots-\frac{(2n-1)\,2n(1-x^2)}{4n-1-}\,\frac{(2n-1)\,2n(1-x^2)}{4n+1-}\cdots. \qquad 34\,(119)$$

10°. Серия рациональных приближений y_n для $y=\operatorname{arctg} x$; строится серия приближений y_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$:

$$y_{n-1}=\frac{x}{T_n\left(-\frac{2}{x^2}-1\right)}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,\frac{c_n^k}{x^{2k}}\,S_{k-1}(x^2),$$

где $S_{k-1}(x^2)=1-\frac{x^2}{3}+\frac{(x^2)^2}{5}-\ldots+(-1)^{k-1}\frac{(x^2)^{k-1}}{2k-1}$, 17 (482)

c_n^k — коэффициенты многочленов $T_n^*(x)$.

Последовательность $\{y_n\}$ сходится к y на всей плоскости комплексного переменного, за исключением точек, принадлежащих мнимой оси. Однако для точек мнимой оси, расположенных между $-i$ и $+i$, сходимость еще сохраняется. Функция $\operatorname{arctg} x$ имеет особые точки при $x=\pm i$.

В частности, полагая $n=4$,

$$\operatorname{arctg} x = \frac{32x}{105}\,\frac{420+700x^2+329x^4+38x^6}{128+256x^2+160x^4+32x^6+x^8}. \qquad 17\,(489)$$

6. Рациональные приближения.

1°. $\operatorname{arctg} x \approx \frac{\pi}{8} + \operatorname{arctg} y,\quad y = \frac{x-0{,}414\,213\,562\,3}{1+0{,}414\,213\,562\,3x}\quad (0 \leqslant x \leqslant 1),$

$\operatorname{arctg} x \approx \frac{3\pi}{8} - \operatorname{arctg} \bar{y},\quad \bar{y} = \frac{1-0{,}414\,213\,562\,3x}{x+0{,}414\,213\,562\,3}\quad (1 \leqslant x < +\infty),$

$\operatorname{arctg} y \approx \sum_{k=0}^{4} a_{2k+1} y^{2k+1}.$

a_1	0,999 999 903 1	a_7	−0,137 516 498 4
a_3	−0,333 321 845 3	a_9	0,077 264 202 0
a_5	0,199 615 567 9		

$$r < 4\cdot 10^{-9},$$

где

$$y = \frac{x-0{,}414\,213\,562\,3}{1+0{,}414\,213\,562\,3x}, \quad \text{если}\quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$y = \frac{1-0{,}414\,213\,562\,3x}{x+0{,}414\,213\,562\,3}, \quad \text{если}\quad 1 \leqslant x < +\infty. \qquad 60\,(89-90)$$

2°. $$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \approx \frac{\sum_{k=0}^{3} a_{2k} x^{2k}}{\sum_{k=0}^{4} a_{2k+1} x^{2k}}.$$

Верхняя граница абсолютной погрешности составляет $\frac{|x|^9}{8}$ для малых значений $|x|$ и $1{,}4\cdot 10^{-5}$ для $|x|=1$.

k	a_{2k}	a_{2k+1}	k	a_{2k}	a_{2k+1}
0	1	1	3	$\frac{19}{210}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{5}{3}$	2	4		$\frac{1}{128}$
2	$\frac{47}{60}$	$\frac{5}{4}$			

56 (52)

Примечание. То же разложение имеет форму 3°.

$$3°.\quad \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \approx \frac{\sum\limits_{k=0}^{3} b_{2k}x^{2k}}{1+\sum\limits_{k=0}^{2} b_{2k+1}x^{2k+2}} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \quad r = 6\cdot 10^{-10}.$$

k	b_{2k}	b_{2k+1}
0	$1+19\cdot 10^{-10}$	1,453 567 134 6
1	1,120 234 014 3	0,565 030 979 6
2	0,280 504 540 7	0,049 017 591 2
3	0,008 561 188 9	

56 (52)

$$4°.\quad \operatorname{arctg} x = x\left\{D_0 + \frac{A_1}{x^2+D_1} - \frac{A_2}{x^2+D_2} - \frac{A_3}{x^2+D_3}\right\} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \qquad 56\ (53)$$

где

$D_0 = 0,174\,655\,438\,8$; $A_1 = 3,709\,256\,262$;
$D_1 = 6,762\,139\,240$; $A_2 = 7,106\,760\,045$;
$D_2 = 3,316\,335\,425$; $A_3 = 0,264\,768\,620\,2$.
$D_3 = 1,448\,631\,538$.

$$5°\quad \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}\left(D_0^* - \frac{A_1^*}{x^2+D_1^*} - \frac{A_2^*}{x^2+D_2^*} - \frac{A_3^*}{x^2+D_3^*}\right) \quad (x \geqslant 1), \qquad 56\ (53)$$

где

$D_0^* = 0,999\,999\,998\,1$; $A_1^* = 0,333\,333\,117\,7$;
$D_1^* = 0,599\,987\,268\,9$; $A_2^* = 0,068\,475\,358\,2$;
$D_2^* = 0,505\,974\,018\,4$; $A_3^* = 0,054\,510\,242\,0$.
$D_3^* = 0,347\,605\,847\,3$.

7. Итерационные процессы. 1°. Нахождение $\frac{\pi}{2}y = \arcsin x$ методом «цифра за цифрой». Ищем двоичное разложение

$$y = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k 2^{-k} \qquad (\alpha_k = 0,\ 1).$$

Строим последовательность систем чисел

$$\{x_n, \alpha_n\} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

$$x_0=x\,(-1\leqslant x\leqslant 1);\ \text{ если } x_0>0,\ \alpha_0=0,\ \text{ то } x_1=2x_0^2-1,$$
$$\text{если } x_0<0,\ \alpha_0=1,\ \text{ то } x_1=1-2x_0^2.$$

Пусть определены $x_0, x_1, \ldots, x_k$ и $\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}$. Тогда при $x_k>0$, $\alpha_k=0$ имеем $x_{k+1}=2x_k^2-1$; при $x_k<0$, $\alpha_k=1$ имеем $x_{k+1}=1-2x_k^2$. Определив $\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_k$, находим

$$\arcsin x\approx\frac{\pi}{2}(\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n)=\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k 2^{-k} \qquad 18\,(105-107)$$

$\left(\text{с точностью до } \frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

2°. Нахождение $\frac{\pi}{2}y=\operatorname{arctg} x$ методом «цифра за цифрой». Находим выражение для $\operatorname{arctg} x$ по модифицированной двоичной системе с цифрами $\tilde\alpha_n$, равными 1 или -1 (см. [20]):

$$\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} x\cdot 0,\tilde\alpha_1\tilde\alpha_2\ldots\tilde\alpha_n\ldots=\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} x\sum_{k=1}^{\infty}\tilde\alpha_k\cdot 2^{-k}.$$

Находим последовательно x_k, α_{k+1} $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$

$$x_0=|x|,\quad x_{i+1}=\frac{2x_i}{1-x_i^2},$$

$\tilde\alpha_1=1$, а при $i>1$, $\tilde\alpha_i=-\operatorname{sign} x_{i-1}$ $\qquad (i=2,\ \ldots)$

$$\operatorname{arctg} x\approx\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} x\sum_{k=1}^{n}\tilde\alpha_k 2^{-k}$$

$\left(\text{с точностью до } \frac{3\pi}{8}2^{-n}\right)$. $\qquad$ 18 (108)

§ 3. Гиперболические функции

1. Общие сведения. 1°. Обозначения $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, $\operatorname{cth} x=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$, $\operatorname{sch} x=\frac{1}{\operatorname{ch} x}$, $\operatorname{csch} x=\frac{1}{\operatorname{sh} x}$:

а) $\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ (*гиперболический синус*),

б) $\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ (*гиперболический косинус*), в) $\operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (*гиперболический тангенс*),

г) $\operatorname{cth} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ (*гиперболический котангенс*),

д) $\operatorname{sch} x = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$ (*гиперболический секанс*),

е) $\operatorname{csch} x = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$ (*гиперболический косеканс*).

2°. Области определения. Областью определения и областью значений функции $\operatorname{sh} x$ является интервал $(-\infty, +\infty)$.

Областью определения функции $\operatorname{ch} x$ является интервал $(-\infty, +\infty)$, а областью значений — полуинтервал $[1, +\infty)$.

Областью определения функции $\operatorname{th} x$ является интервал $(-\infty, +\infty)$, а областью значений — интервал $(-1, 1)$, т. е. $|\operatorname{th} x| < 1$.

Областью определения функции $\operatorname{cth} x$ являются интервалы $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, а областью значений — интервалы $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$. Таким образом, $|\operatorname{cth} x| > 1$.

3°. Аргумент x в гиперболических функциях $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ и т. д. можно истолковывать как удвоенную площадь гиперболического сектора.

4°. $\operatorname{ch} x$ — функция четная, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ — нечетные.

$$\operatorname{sh} x = \operatorname{sign} x \operatorname{sh} |x|, \quad \operatorname{ch} x = \operatorname{ch} |x|,$$
$$\operatorname{th} x = \operatorname{sign} x \operatorname{th} |x|, \quad \operatorname{cth} x = \operatorname{sign} x \operatorname{cth} |x|.$$

5°. Выражение одних гиперболических функций через другие. 38(17)

$\operatorname{sh} x$		$\pm\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}$	$\dfrac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}}$
$\operatorname{ch} x$	$\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}$		$\dfrac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}$	$\pm\dfrac{\operatorname{cth} x}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}}$
$\operatorname{th} x$	$\dfrac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}{\operatorname{ch} x}$		$\dfrac{1}{\operatorname{cth} x}$
$\operatorname{cth} x$	$\dfrac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}}{\operatorname{sh} x}$	$\pm\dfrac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{th} x}$	

6° Общие формулы кратных аргументов

$$(\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x)^n=\operatorname{sh} nx+\operatorname{ch} nx \qquad (n \text{ — целое число}). \qquad 26\,(39)$$

$$\operatorname{sh} nx=\operatorname{sh} x \sum_{k=1}^{E\left(\frac{n+1}{2}\right)} \binom{n}{2k-1} \operatorname{sh}^{2k-1} x \operatorname{ch}^{n-2k+1} x;$$

$$=\operatorname{sh} x \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n+1}{2}\right)} (-1)^k \binom{n-k-1}{k} 2^{n-2k-1} \operatorname{ch}^{n-2k-1} x. \qquad 26\,(41)$$

$$\operatorname{ch} nx=\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \binom{n}{2k} \operatorname{sh}^{2k} x \operatorname{ch}^{n-2k} x=2^{n-1} \operatorname{ch}^n x+$$

$$+n \sum_{k=1}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^k \frac{1}{k} \binom{n-2k-1}{k-1} 2^{n-2k-1} \operatorname{ch}^{n-2k} x. \qquad 26\,(41)$$

7°. Соотношения между гиперболическими и тригонометрическими функциями.

$$\operatorname{ch} x=\cos ix. \qquad 38\,(38)$$

$$\operatorname{sh} x=-i \sin ix. \qquad 38\,(38)$$

$$\operatorname{th} x=-i \operatorname{tg} ix. \qquad 38\,(38)$$

$$\operatorname{cth} x=i \operatorname{ctg} ix. \qquad 38\,(38)$$

2. Разные формулы.

1°. $$\frac{x^k \operatorname{th} x \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 2x \pm 2x}=\frac{x^k \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} 2x \pm 2x} \pm \frac{x^{k-1} \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 2x \pm 2x} \mp \frac{x^{k-1}}{2 \operatorname{ch} x}. \qquad 44\,(163)$$

2°. $$\frac{x^k \operatorname{cth} x \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} 2x \pm 2x}=\frac{x^k \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 2x \pm 2x} \mp \frac{x^{k-1} \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} 2x \pm 2x} \pm \frac{x^{k-1}}{2 \operatorname{sh} x}. \qquad 44\,(163)$$

3°. $$\frac{x^k \operatorname{th} x}{\operatorname{sh} 2x \pm 2x}=\frac{x^k}{\operatorname{sh} 2x \pm 2x} \pm \frac{x^{k-1}(1-e^{-2x})}{2(\operatorname{sh} 2x \pm 2x)} \mp \frac{x^{k-1} e^{-x}}{2 \operatorname{ch} x}. \qquad 44\,(162)$$

4°. $$\frac{x^k \operatorname{cth} x}{\operatorname{sh} 2x \pm 2x}=\frac{x^k}{\operatorname{sh} 2x \pm 2x} \mp \frac{x^{k-1}(1-e^{-2x})}{2(\operatorname{sh} 2x \pm 2x)} \pm \frac{x^{k-1} e^{-x}}{2 \operatorname{sh} x} \qquad 44\,(162)$$

5° $\operatorname{sh}^2 x-\operatorname{sh}^2 y=\operatorname{sh}(x+y) \operatorname{sh}(x-y)=\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{ch}^2 y.$ 26 (39)

6°. $\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{ch}^2 y=\operatorname{ch}(x+y) \operatorname{ch}(x-y)=\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 y.$ 26 (39)

3. Степенные разложения.

1°. $\operatorname{sh} x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$. 26(48)

2°. $\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$. 26(48)

3°. $\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \ldots =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!} B_{2k}{}^{*)} x^{2k-1} \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right).$$ 26(48)

4°. $\operatorname{cth} x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \ldots =$

$$= \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1} \quad (|x| < \pi).$$

26(49); 32(522)

5°. $\operatorname{sch} x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{61x^6}{720} + \ldots =$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{E_{2k}{}^{**)}}{(2k)!} x^{2k} \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right).$$ 26(49)

6°. $\operatorname{csch} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} - \frac{31x^5}{15\,120} + \ldots =$

$$= \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(2^{2k-1}-1) B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1} \quad (|x| < \pi).$$ 26(49); 52(418)

7°. $\operatorname{sh} x = \operatorname{cosec} x \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k} x^{4k-2}}{(4k-2)!}$. 26(49); 52

8°. $\operatorname{ch} x = \sec x + \sec x \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} x^{4k}}{(4k)!}$. 26(49); 52

---

*) B_{2k} — числа Бернулли (см. [1], стр. 348).
**) E_{2k} — числа Эйлера (см. [1], стр. 359).

9°. $\operatorname{sh} x = x \sec x - \sec x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} =$

$= \sec x \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{E\left(\frac{k}{2}\right)} \frac{2^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!}.$ 26 (49); 52

10°. $\operatorname{ch} x = x \operatorname{cosec} x + \operatorname{cosec} x \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} =$

$= \operatorname{cosec} x \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{E\left(\frac{k-1}{2}\right)} \frac{2^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!}.$ 26 (49); 52

11°. $\operatorname{th} x = \frac{1}{\operatorname{sh} 2x} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x)^{2k}}{(2k)!}.$ 44 (164)

4. Бесконечные произведения.

1°. $\operatorname{sh} x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right).$ 26 (51); 36 (148)

2°. $\operatorname{ch} x = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{4x^2}{(2k+1)^2 \pi^2}\right).$ 26 (51); 36 (149)

3°. $\frac{\operatorname{ch} x - \cos a}{1 - \cos a} = \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{x}{2k\pi + a}\right)^2\right].$ 26 (51); 66 (216)

5. Ряды показательных функций.

1°. $\operatorname{th} x = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2kx} \quad (x > 0).$ 26 (37)

2°. $\operatorname{sch} x = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-(2k+1)x} \quad (x > 0).$ 26 (37)

3°. $\operatorname{csch} x = 2 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(2k+1)x} \quad (x > 0).$ 26 (37)

6. Разложения на простейшие дроби.

1°. $\operatorname{th} \frac{\pi}{2} x = \frac{4x}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2 + x^2}.$ 26 (50)

2°. $\operatorname{cth} \pi x = \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + k^2}.$ 26 (50)

7. Ортогональные и другие многочленные разложения.
А. Разложения по многочленам Лежандра.

1°. $\operatorname{sh} x = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} P_{2k-1}(x) \qquad (|x| < 1).$

a_1	1,103 638 323 514	a_7	0,000 007 620 547 335
a_3	0,070 455 633 668	a_9	0,000 000 029 718 090
a_5	0,001 099 586 127	a_{11}	0,000 000 000 072 731

2°. $\operatorname{ch} x = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} P_{2k}(x) \qquad (|x| < 1).$

a_0	1,175 201 193 644	a_6	0,000 099 454 339 113
a_2	0,357 814 350 647	a_8	0,000 000 506 471 975
a_4	0,009 965 128 149	a_{10}	0,000 000 001 560 966

Б. Разложения по многочленам Эрмита.

3°. $\frac{1}{e} \operatorname{sh} 2x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} H_{2k+1}(x).$ 26 (412)

4°. $\frac{1}{e} \operatorname{ch} 2x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} H_{2k}(x).$ 26 (412)

8. Многочленные приближения.

1°. $\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} \qquad (|x| < 1), \quad r = 10^{-10}.$

a_1	0,999 999 999 988	a_7	0,000 198 411 962
a_3	0,166 666 666 713	a_9	0,000 002 756 445
a_5	0,008 333 333 485	a_{11}	0,000 000 025 052

2°. $\operatorname{ch} x = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} x^{2k} \qquad (|x| < 1), \quad r = 10^{-9}.$

a_0	0,999 999 999 999	a_6	0,001 388 892 118
a_2	0,500 000 000 058	a_8	0,000 024 795 048
a_4	0,041 666 665 951	a_{10}	0,000 000 281 639

9. Разложения в цепные дроби.

1°. $$\begin{array}{lllll} \operatorname{sh} x \approx x + & \dfrac{x^3}{6} & - \quad \dfrac{3x^2}{10} & + \quad \dfrac{11x^2}{42} & - \\ \dfrac{x}{1} & \dfrac{6x+x^3}{6} & \dfrac{60x+7x^3}{60-3x^2} & \dfrac{2520x+360x^3+11x^5}{2520-60x^2} & \\ & & & - \dfrac{25x^2}{66} + \ldots & \end{array} \qquad 34\,(164)$$

2°. $$\operatorname{sh} x = \frac{x(1+F)}{(1+F)^2 - \frac{x^2}{4}}, \qquad 65\,(264)$$

где F определено в гл. II, § 1, п. 5, 7°.

Это разложение сходится быстрее, чем другие известные разложения для $\operatorname{sh} x$.

3°. $$\begin{array}{llllll} \operatorname{ch} x = & \dfrac{1}{1} - & \dfrac{x^2}{2} & + \quad \dfrac{5x^2}{6} & - \quad \dfrac{3x^2}{50} & + \\ \dfrac{0}{1} & \dfrac{1}{1} & \dfrac{2}{2-x^2} & \dfrac{12+5x^2}{12-x^2} & \dfrac{600+244x^2}{600-56x^2+3x^4} & \\ & & & + \dfrac{313x^2}{126} - \ldots & & \\ & & & \dfrac{75\,600+34\,500x^2+5\cdot 313x^4}{75\,600-3300x^2+65x^4} & & \\ & & & \dfrac{15\,120+6900x^2+313x^4}{15\,120-660x^2+13x^4} & & \end{array} \qquad 34\,(166)$$

4°. $$\begin{array}{lllll} \operatorname{ch} x \approx 1 + & \dfrac{x^2}{2} & - \quad \dfrac{x^2}{6} & + \quad \dfrac{3x^2}{10} & - \\ \dfrac{1}{1} & \dfrac{2+x^2}{2} & \dfrac{12+5x^2}{12-x^2} & \dfrac{120+56x^2+3x^4}{120-4x^2} & \\ & & & - \dfrac{13x^2}{126} + & \\ & & & \dfrac{15\,120+6\,900x^2+313x^4}{15\,120-660x^2+13x^4} & \end{array} \qquad 34\,(167)$$

5°. $$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{\frac{x^2}{2}}{(1+F)^2 - \frac{x^2}{4}},$$

где F определено в гл. II, § 1, п. 5, 7°.

Это разложение сходится быстрее, чем другие известные разложения для $\operatorname{ch} x$.

$$6^\circ.\quad \operatorname{th} x = \frac{x}{1+}\,\frac{x^2}{3+}\,\frac{x^2}{5+}\dots+\frac{x^2}{2n+1+}\dots$$

34 (121); 20 (133)

Дробь сходится на всей плоскости комплексного переменного, за исключением точек несущественной расходимости. При действительных x имеет место цепь неравенств:

$$\frac{3x}{3+x^2} \leqslant \frac{105x+x^3}{105+45x^2+x^4} \leqslant \dots \leqslant \operatorname{th} x \leqslant \dots$$

$$\dots \leqslant \frac{945x+105x^3+x^5}{945+420x^2+15x^4} \leqslant \frac{15x+x^3}{15+6x^2} \leqslant x. \qquad 34\,(121)$$

$$7^\circ.\quad \operatorname{th} x = x - \frac{5x^3}{15+7x^2-}\ \frac{\dfrac{x^2}{1}}{\dfrac{x}{1}\ \dfrac{15x+2x^3}{15+7x^2}\ \dfrac{15x+x^3}{15+6x^2}} - \frac{\dfrac{9x^2}{315+28x^2}}{\dfrac{4725x+600x^3+10x^5}{4725+2175x^2+105x^4}\ \dfrac{945x+120x^3+2x^5}{945+435x^2+21x^4}} -$$

$$- \frac{\dfrac{5x^2}{1}}{\dfrac{4725\,x+525x^3+5x^5}{4725+2100x^2+75x^4}\ \dfrac{945x+105x^3+x^5}{945+420x^2+15x^4}} - \frac{13x^2}{1287-44x^2-}\dots$$

$$\frac{(4n+1)\,x^2}{-(4n-3)\,(4n-1)\,(4n+1)+4\,(4n-1)\,x^2-}\ \frac{(4n-3)\,x^2}{1}-\dots.$$

34 (122)

$$8^\circ.\quad \operatorname{th} x = \frac{x}{1+}\,\frac{\frac{x^2}{3}}{1+}\,\frac{\frac{x^2}{15}}{1+}\,\frac{\frac{x^2}{35}}{1+}\dots,$$

где

$$a_1 = x, \qquad a_{n+1} = \frac{x^2}{4n^2-1} \qquad \text{для } n \geqslant 1,$$

$$|r_{n-1}(x)| \leqslant \frac{|x^{2n-1}|}{D_{n-1}D_n\prod\limits_{i=1}^{n}(4i^2-1)}. \qquad 65\,(264)$$

Число членов, требуемых для получения точных 12 десятичных знаков,

x	th x в форме 8°
0,1	4
1	8
10	19

9°. $$\operatorname{th} x = \cfrac{\frac{x}{2}}{\frac{1}{2} + \cfrac{\frac{x^2}{4\cdot 2}}{\frac{3}{4} + \cfrac{\frac{x^2}{4\cdot 8}}{\frac{5}{8} + \cfrac{\frac{x^2}{8\cdot 8}}{\frac{7}{8} + \dots}}}} \qquad 65\,(264)$$

10°. $\operatorname{th} x \approx$

$$\approx \frac{C_k^1 (2k-1)(2k-2)\dots(k+1)\,x - C_k^3 (2k-3)(2k-4)\dots(k+1)\,4x^3 + \dots}{k(2k-1)\dots(k+1) + C_k^2 (2k-2)(2k-3)\dots(k+1)\,2x^2 + \dots}. \qquad 34\,(152)$$

Это общее выражение для всех подходящих дробей разложения п. 6.

§ 4. Обратные гиперболические функции

1. Общие сведения. 1°. Определения.

Если $x = \operatorname{sh} y$, то $y = \operatorname{Arsh} x$ (ареасинус гиперболический).

Если $x = \operatorname{ch} y$, то $y = \operatorname{Arch} x$ (ареакосинус гиперболический).

Если $x = \operatorname{th} y$, то $y = \operatorname{Arth} x$ (ареатангенс гиперболический).

Если $x = \operatorname{cth} y$, то $y = \operatorname{Arcth} x$ (ареакотангенс гиперболический).

2°. Областью определения и областью значений функции $\operatorname{Arsh} x$ является интервал $(-\infty, +\infty)$.

Функция $\operatorname{Arch} x$ является двузначной и состоит из двух ветвей, имеющих общую область определения $[1, +\infty)$. Областью значений одной ветви функции является $[0, +\infty)$. Область значений другой ветви — $(-\infty, 0]$.

Областью определения функции $\operatorname{Arth} x$ является интервал $(-1, +1)$, а областью значений — $(-\infty, +\infty)$.

Областью определения функции $\operatorname{Arcth} x$ являются интервалы $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$, а областью значений — соответственно интервалы $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

3°. $\operatorname{Arch} x$ — четная функция, $\operatorname{Arsh} x$, $\operatorname{Arth} x$, $\operatorname{Arcth} x$ — нечетные функции.

$$\operatorname{Arsh} x = \operatorname{sign} x \operatorname{Arsh} |x|,$$
$$\operatorname{Arth} x = \operatorname{sign} x \operatorname{Arth} |x|,$$
$$\operatorname{Arcth} x = \operatorname{sign} x \operatorname{Arcth} |x|.$$

4°. Функциональные соотношения. а) Выражение одних обратных гиперболических функций через другие.

$\operatorname{Arsh} x =$		$\pm \operatorname{Arch} \sqrt{x^2+1}$	$\operatorname{Arth} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{Arcth} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$
$\operatorname{Arch} x =$	$\pm \operatorname{Arsh} \sqrt{x^2-1}$		$\pm \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\pm \operatorname{Arcth} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{Arth} x =$	$\operatorname{Arsh} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\pm \operatorname{Arch} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\operatorname{Arcth} \frac{1}{x}$
$\operatorname{Arcth} x =$	$\operatorname{Arsh} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\pm \operatorname{Arch} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{Arth} \frac{1}{x}$	

38 (27); 37 (68)

При выражении функций через ареакосинус последний надо брать со знаком плюс при $x>0$ и со знаком минус при $x<0$.

Выражения же самого ареакосинуса через остальные функции надо брать с двумя знаками.

б) Связь между обратными гиперболическими функциями, обратными тригонометрическими функциями и логарифмом.

$$\operatorname{Arsh} x = \ln (x + \sqrt{x^2+1}) = \frac{1}{i} \arcsin (ix). \qquad 38(28)$$

$$\operatorname{Arch} x = \ln (x + \sqrt{x^2-1}) = i \arccos x. \qquad 38(28)$$

$$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{i} \operatorname{arctg} (ix). \qquad 38(28)$$

$$\operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{i} \operatorname{arcctg} (-ix). \qquad 38(28)$$

2. Степенные разложения.

1°. $\operatorname{Arsh} x = x - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 - \ldots;$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)} x^{2k+1};$$

$$= xF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -x^2\right) \quad (|x|<1). \qquad 26\,(64);\ 32\,(480)$$

2°. $\operatorname{Arsh} x = \ln 2x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{4x^4} + \ldots;$

$$= \ln 2x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(2k)!\,x^{-2k}}{2^{2k}(k!)^2\,2k} \quad (|x|>1). \qquad 26\,(64); 39$$

3°. $\operatorname{Arch} x = \ln 2x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2\,2k} x^{-2k} \quad (|x|>1).$ 26 (64);39

4°. $\operatorname{Arth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

$(|x|<1).$ 26 (64); 39

5°. $\operatorname{Arsh}\frac{1}{x} = \operatorname{Arcsch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)} x^{-2k-1}$

$(|x|>1).$ 26 (64);39

6°. $\operatorname{Arch}\frac{1}{x} = \operatorname{Arsch} x = \ln\frac{2}{x} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2\,2k} x^{2k}$

$(0<x<1).$ 26 (65);39

7°. $\operatorname{Arsh}\frac{1}{x} = \operatorname{Arcsch} x = \ln\frac{2}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(2k)!}{2^{2k}(k!)^2\,2k} x^{2k}$

$(0<x<1).$ 26 (65);39

8°. $\operatorname{Arth}\frac{1}{x} = \operatorname{Arcth} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{-(2k+1)}}{2k+1} \quad (|x|>1).$ 26 (65);39

3. Разложения в цепные дроби.

1°. $\operatorname{Arth} x = \frac{x}{1} \underset{-}{} \frac{x^2}{3} \underset{-}{} \frac{4x^2}{5} \underset{-}{} \ldots \underset{-}{} \frac{n^2x^2}{2n+1} \underset{-}{} \ldots$ 34 (115)

Дробь сходится на всей плоскости комплексного переменного x, исключая полуинтервалы действительной оси $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$.

2°. $$\operatorname{Arth} x = x + \frac{x^3}{3} - \frac{9x^2}{5} - \frac{4x^2}{7} - \frac{25x^2}{9} - \ldots$$
$$\ldots - \frac{(2n+1)^2 x^2}{4n+1} - \frac{4n^2x^2}{4n+3} - \ldots \qquad 34(115)$$

Дробь сходится на всей плоскости комплексного переменного x, исключая полуинтервалы действительной оси $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$.

3°. $$\frac{\operatorname{Arsh} x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{1+x^2} - \frac{x^2}{3} - \frac{4x^2}{5(1+x^2)} - \frac{9x^2}{7} - \ldots$$
$$- \frac{4n^2x^2}{(4n+1)(1+x^2)} - \frac{(2n+1)^2 x^2}{4n+3} - \ldots \qquad 34(116)$$

4°. $$\sqrt{1+x^2}\operatorname{Arsh} x = x + \frac{x^3}{3(1+x^2)} - \frac{9x^2}{5} - \frac{4x^2}{7(1+x^2)} -$$
$$- \frac{(2n+1)^2 x^2}{4n+1} - \frac{4n^2x^2}{(4n+3)(1+x^2)} - \ldots \qquad 34(117)$$

5°. $$\frac{\operatorname{Arch} x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x} - \frac{x^2-1}{3x} - \ldots - \frac{n^2(x^2-1)}{(2n+1)x} - \qquad 34(118)$$

6°. $$\frac{\operatorname{Arsh} x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{1} + \frac{1\cdot 2x^2}{3} + \frac{1\cdot 2x^2}{5} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(2n-1)\,2nx^2}{4n-1} + \frac{(2n-1)\,2nx^2}{4n+1} + \ldots \qquad 34(119)$$

7°. $$\operatorname{Arth} x = \frac{x}{1-x^2} + \frac{1\cdot 2x^2}{3} + \frac{1\cdot 2x^2}{5(1-x^2)} + \ldots$$
$$+ \frac{(2n-1)\,2nx^2}{4n-1} + \frac{(2n-1)\,2nx^2}{(4n+1)(1-x^2)} + \ldots \qquad 34(119)$$

8°. $$\frac{\operatorname{Arch} x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{1} + \frac{1\cdot 2(x^2-1)}{3} + \frac{1\cdot 2(x^2-1)}{5} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(2n-1)\,2n(x^2-1)}{4n-1} + \frac{(2n-1)\,2n(x^2-1)}{4n+1} + \ldots \qquad 34(119)$$

4. Рациональные приближения. 1°. Рациональные приближения (аппроксимация Падэ) для $\operatorname{Arsh}\frac{x}{2} \approx \frac{x}{2}\,\frac{N_p\left[\left(\frac{x}{4}\right)^2\right]}{D_q\left[\left(\frac{x}{4}\right)^2\right]}$, $p = 0\ (1)\ 4$; $q = 0\ (1)\ 4$ (см.

[58], стр. 43) (p и q — показатели степеней многочленов N_p и D_q как многочленов от $\left(\left(\frac{x}{4}\right)^2\right)$.

а) $p=0$

$q=0$	1
$q=1$	$\dfrac{1}{1+\frac{2}{3}\left(\frac{x}{4}\right)^2}$
$q=2$	$\dfrac{1}{1+\frac{2}{3}\left(\frac{x}{4}\right)^2-\frac{34}{45}\left(\frac{x}{4}\right)^4}$
$q=3$	$\dfrac{1}{1+\frac{2}{3}\left(\frac{x}{4}\right)^2-\frac{34}{45}\left(\frac{x}{4}\right)^4+\frac{1468}{945}\left(\frac{x}{4}\right)^6}$
$q=4$	$\dfrac{1}{1+\frac{2}{3}\left(\frac{x}{4}\right)^2-\frac{34}{45}\left(\frac{x}{4}\right)^4+\frac{1468}{945}\left(\frac{x}{4}\right)^6-\frac{27\,859}{14\,175}\left(\frac{x}{4}\right)^8}$

б) $p=1$

$q=0$	$1-\frac{2}{3}\left(\frac{x}{4}\right)^2$
$q=1$	$\dfrac{1+\frac{17}{15}\left(\frac{x}{4}\right)^2}{1+\frac{9}{5}\left(\frac{x}{4}\right)^2}$
$q=2$	$\dfrac{1+\frac{734}{357}\left(\frac{x}{4}\right)^2}{1+\frac{324}{119}\left(\frac{x}{4}\right)^2+\frac{366}{595}\left(\frac{x}{4}\right)^4}$
$q=3$	$\dfrac{1+\frac{27\,859}{11\,010}\left(\frac{x}{4}\right)^2}{1+\frac{11\,733}{3670}\left(\frac{x}{4}\right)^2+\frac{1709}{1835}\left(\frac{x}{4}\right)^4-\frac{69\,049}{192\,675}\left(\frac{x}{4}\right)^6}$

в) $p=2$

$q=0$	$1-\frac{2}{3}\left(\frac{x}{4}\right)^2+\frac{6}{5}\left(\frac{x}{4}\right)^4$
$q=1$	$\dfrac{1+\frac{12}{7}\left(\frac{x}{4}\right)^2-\frac{122}{315}\left(\frac{x}{4}\right)^4}{1+\frac{50}{21}\left(\frac{x}{4}\right)^2}$
$q=2$	$\dfrac{1+\frac{1709}{549}\left(\frac{x}{4}\right)^2+\frac{69\,049}{57\,645}\left(\frac{x}{4}\right)^4}{1+\frac{2075}{549}\left(\frac{x}{4}\right)^2+\frac{1075}{427}\left(\frac{x}{4}\right)^4}$
$q=3$	$\dfrac{1+\frac{9\,274\,172}{2\,278\,617}\left(\frac{x}{4}\right)^2+\frac{12\,022\,609}{3\,797\,695}\left(\frac{x}{4}\right)^4}{1+\frac{3\,597\,750}{759\,539}\left(\frac{x}{4}\right)^2+\frac{3\,891\,575}{759\,539}\left(\frac{x}{4}\right)^4+\frac{9\,391\,090}{15\,950\,319}\left(\frac{x}{4}\right)^6}$

г) $p=3$

$q=0$	$1-\frac{2}{3}\left(\frac{x}{4}\right)^2+\frac{6}{5}\left(\frac{x}{4}\right)^4-\frac{20}{7}\left(\frac{x}{4}\right)^6$
$q=1$	$\dfrac{1+\frac{37}{18}\left(\frac{x}{4}\right)^2-\frac{83}{135}\left(\frac{x}{4}\right)^4+\frac{43}{105}\left(\frac{x}{4}\right)^6}{1+\frac{49}{18}\left(\frac{x}{4}\right)^2}$
$q=2$	$\dfrac{1+\frac{27\,218}{7095}\left(\frac{x}{4}\right)^2+\frac{73\,628\,599}{30\,203\,415}\left(\frac{x}{4}\right)^4-\frac{888\,397\,114}{3\,171\,358\,575}\left(\frac{x}{4}\right)^6}{1+\frac{31\,948}{7095}\left(\frac{x}{4}\right)^2+\frac{54\,145}{12\,771}\left(\frac{x}{4}\right)^4}$
$q=3$	$\dfrac{1+\frac{186\,989\,305}{36\,625\,251}\left(\frac{x}{4}\right)^2+\frac{4\,289\,878\,962}{671\,462\,935}\left(\frac{x}{4}\right)^4+\frac{17\,487\,984\,593}{1\,410\,072\,635}\left(\frac{x}{4}\right)^6}{1+\frac{70\,468\,713}{12\,208\,391}\left(\frac{x}{4}\right)^2+\frac{1\,213\,595\,250}{134\,292\,587}\left(\frac{x}{4}\right)^4+\frac{1\,287\,365\,485}{402\,877\,761}\left(\frac{x}{4}\right)^6}$

д) $p=4$

$q=0$	$1-\frac{2}{3}\left(\frac{x}{4}\right)^2+\frac{6}{5}\left(\frac{x}{4}\right)^4-\frac{20}{7}\left(\frac{x}{4}\right)^6+\frac{70}{9}\left(\frac{x}{4}\right)^8$

ГЛАВА IV

АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ НА НЕКОТОРЫХ ОТЕЧЕСТВЕННЫХ ПРОГРАММНО-УПРАВЛЯЕМЫХ МАШИНАХ

Вводные замечания

В программно-управляемых машинах значения элементарных функций вычисляются при помощи «стандартных программ», в основу которых кладется тот или другой алгоритм вычисления этих функций: обычно создаются стандартные программы для функций: $\frac{1}{x}$ (в машинах без деления), $\sqrt{x}$ (в машинах без непосредственного извлечения корня), 2^x, $\ln x$, тригонометрических и обратных тригонометрических функций.

Для нахождения $y = \sqrt{x}$ обычно применяется итерационный метод Герона (см. гл. I, § 3, п. 6, 1°), алгоритмы различаются выбором начального приближения y_0. При этом, если $x = 2^p z$, $\frac{1}{2} \leqslant z < 1$, $\sqrt{x} = 2^{\frac{p}{2}} \sqrt{z}$, то нахождение $\sqrt{x}$ сводится к нахождению $\sqrt{z}$. (В машинах без деления оно заменяется итерационным процессом 2° (см. там же).)

При вычислении тригонометрических функций их аргумент приводится к первой четверти или получетверти.

При вычислении 2^x представляют $x = p + z$ $(p = E(x)$, $z = \{x\})$ и сводят вычисление $2^x = 2^p \cdot 2^z$ к вычислению 2^z, $0 \leqslant z < 1$.

Аналогично, при $x = 2^p z$, $\frac{1}{2} \leqslant z < 1$, $\ln x = p \ln 2 + \ln z$ и нахождение $\ln x$ сводится к нахождению $\ln z$.

§ 1. «Стрела» *)

1. Вычисление 2^x $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

1°. $2^x \approx \sum_{k=0}^{8} a_k x^k.$

Коэффициенты a_k даны в гл. II, § 1, п. 4, 2°, б).

2°. $2^x = (2^{\frac{x}{8}})^8 = \{[(2^{\frac{x}{8}})^2]^2\}^2,$

$$2^{\frac{x}{8}} \approx \sum_{k=0}^{4} a_k x^k.$$

Коэффициенты a_k приведены в гл. II, § 1, п. 4, 2°, в).

Погрешность вычисления $2^{\frac{x}{8}}$ не превосходит $0{,}88 \cdot 10^{-10}$. Относительная ошибка при вычислении 2^x (при $|x|$, близких к 0,5) может достигать $5 \cdot 10^{-10}$.

2. Вычисление $\ln x$ $\left(\frac{1}{2} \leqslant x < 1\right)$.

$$\ln x = -\mu_i \ln 2 + (((((a_6 z + a_5) z + a_4) z + a_3) z + a_2) z + a_1) z,$$

$$z = \lambda x,$$

$$\lambda = \lambda_i, \text{ если } x_i \leqslant x < x_{i+1} \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

$$\lambda_i = (\sqrt[4]{2})^i, \quad x_i = \frac{1}{2} (\sqrt[4]{2})^i.$$

μ_1	3,659 646 860 780	μ_3	4,159 646 860 780
μ_2	3,909 646 860 780	μ_4	4,409 646 860 780

a_1	5,500 472 922 511	a_4	— 2,638 754 306 465
a_2	— 6,299 229 808 534	a_5	0,772 171 339 086
a_3	5,126 738 196 584	a_6	— 0,098 011 234 843

3. Вычисление синуса. Вычисление $\sin \frac{\pi}{2} x$.

а) $\sin \frac{\pi}{2} x \approx \sum_{k=0}^{5} a_{2k+1} x^{2k+1} \qquad (|x| \leqslant 1).$

*) См. [10].

Коэффициенты a_{2k+1} даны в гл. III, § 1, п. 6, 2°, г). Относительная погрешность при x, близких к 1, может достигать $0{,}5\cdot 10^{-9}$.

б) $\sin x \approx \sum_{k=0}^{5} a_{2k+1}x^{2k+1} \qquad \left(|x|<\frac{\pi}{2}\right).$

Коэффициенты a_{2k+1} приведены в гл. III, § 1, п. 6, 3°, в).

4. Вычисление тангенса.

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x \approx \sum_{k=0}^{8} a_{2k+1}x^{2k+1} \qquad (|x|<1).$$

Коэффициенты a_{2k+1} даны в гл. III, § 1, п. 6, 10°, а). Точность: $0{,}2\cdot 10^{-9}$.

5. Вычисление котангенса.

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}x \approx \frac{a_{-1}}{x} + \sum_{k=0}^{4} a_{2k+1}x^{2k+1}.$$

Коэффициенты a_{2k+1} даны в гл. III, § 1, п. 6, 11°. Точность: $0{,}2\cdot 10^{-9}$.

6. Вычисление $\arcsin x$. Если $x^2<0{,}5$, то

$$\arcsin x \approx \sum_{k=0}^{9} a_{2k+1}x^{2k+1};$$

если $x^2>0{,}5$, то

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{1-x^2}.$$

Коэффициенты a_{2k+1} даны в гл. III, § 2, п. 4, 2°.

§ 2. БЭСМ

1. Вычисление $y=\sqrt{x}\left(\frac{1}{2}\leqslant x<1\right)$. Начальные приближения: $y_0=k(x+b-\Delta)$ при $\frac{1}{2}\leqslant x<k$, $y_0=k(x+b)$ при $k\leqslant x<1$;

$$k=0{,}57155, \quad b=0{,}75787, \quad \Delta=0{,}013857.$$

Производятся две итерации по формуле Герона (см. гл. I, § 3, п. 6, 1°), которые сворачиваются в единую формулу

$$y=\frac{1}{4}\left(y_0+\frac{x}{y_0}\right)+\frac{x}{y_0+\frac{x}{y_0}}; \qquad 7\,(9,10)$$

точность: 2^{-33}.

2. Вычисление 2^x $(0 \leqslant x < 1)$.

1°. $2^x \approx \sum\limits_{k=0}^{7} a_k x^k$.

Коэффициенты a_k приведены в гл. II, § 1, п. 4, 2°, а).

2°. Для вычисления полученного многочлена используется следующая формула, сокращающая число необходимых умножений:

$$2^x=a_0+\bar{x}\{c_1+\bar{x}[c_2+\bar{x}\{[(\bar{x}+B)^2+C+\bar{x}][(\bar{x}+B)^2+D]-E\}]\},$$

где $\bar{x}=\lambda x$.

λ	0,215 596 346 446	B	0,105 963 619 947
c_1	3,215 022 885 576	C	− 1,277 917 410 482
c_2	5,168 182 735 768	D	3,881 751 544 667
		E	− 10,469 925 626 182

Подсчет контрольных значений 2^x с использованием этих коэффициентов дает совпадение одиннадцати значащих цифр. 7 (6, 7)

3. Вычисление $\ln x$ $\left(\frac{1}{2} \leqslant x < 1\right)$

$$\ln x=-\frac{1}{2}\ln 2+\sum_{k=0}^{3} a_{2k+1}u^{2k+1},$$

$$u=\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Коэффициенты a_{2k+1} приведены в гл. II, § 2, п. 6, 3°.

4. Вычисление $\sin x$ и $\cos x \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$. Функции $\sin x$ и $\cos x$ находятся через тангенс половины аргумента

$$2\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{z}{\sum\limits_{k=0}^{4} a_k z^{2k}}, \qquad z = \frac{x}{\pi} \qquad 7(7)$$

Коэффициенты a_k приведены в гл. III, § 1, п. 8, 9°.

Для вычисления полученного выражения используется следующая формула, сокращающая число необходимых умножений:

$$2\operatorname{tg}\frac{x}{2} \approx \frac{\bar{x}}{E - [(\bar{x}^2 + B)^2 + C + \bar{x}^2]\,[(\bar{x}^2 + B)^2 + D]},$$

где $\bar{x} = \lambda z$.

λ	0,106 785 251 669	D	0,705 279 988 224
B	−0,072 162 649 192	E	0,111 522 419 569
C	−0,039 607 473 057		

Подсчет контрольных значений $\sin x$ и $\cos x$ с использованием приведенных коэффициентов дает совпадение одиннадцати десятичных знаков.

5. Вычисление $\arcsin x$.

$$\arcsin x = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \left(|x| \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right), \\ \operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} & \left(x \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{cases} \qquad 7(3)$$

6. Вычисление $\operatorname{arctg} x$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} z + c \begin{cases} x < x_0, & z = x, & c = 0 \\ x \geqslant x_0, & z = \dfrac{x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \dfrac{x}{\sqrt{3}}}, & c = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \\ & & = \dfrac{\pi}{6}, \end{cases}$$

$$x_0=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1},\quad |z|\leqslant x_0=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\approx 0{,}268, \qquad 7(11)$$

$$\operatorname{arctg} z\approx\sum_{k=0}^{4} a_{2k+1}z^{2k+1}.$$

Коэффициенты a_{2k+1} приведены в гл. III, § 2, п. 4, 7°.

Для увеличения скорости вычисления многочлена, аппроксимирующего $\operatorname{arctg} z$, может быть применена более экономная схема:

$$\operatorname{arctg} z=z\{[(Az^2+B)^2+C+z^2][(Az^2+B)^2+D]-E\};$$

A	0,555 058 703 74	D	0,175 045 006 22	7 (13)
B	—0,657 607 298 52	E	—0,586 132 618 27	
C	0,248 824 379 98			

При подсчете контрольных значений функции $\operatorname{arctg} z$ получается совпадение десяти десятичных знаков.

§ 3. М-2

1. Вычисление $\sqrt{x}$ $\left(\frac{1}{2}\leqslant x<1\right)$ (с плавающей запятой). $y=\sqrt{x}$ вычисляется по итерационному процессу Герона (см. гл. I, § 3, п. 6,1°) с начальным приближением

$$y_0=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x. \qquad 11(163)$$

В среднем для вычисления $\sqrt{x}$ с точностью до 10^{-8} требуется две итерации.

2. Вычисление e^x. 1°. Вычисление e^x с плавающей запятой.

$$e^x=2^{\left[\frac{x}{\ln 2}\right]}(e^z)^2,\quad z=\left\{\frac{x}{\ln 2}\right\}\cdot\frac{\ln 2}{2},\quad |z|\leqslant\frac{\ln 2}{2}, \qquad 11(159)$$

$$e^z\approx\frac{12(z^2+10)+z(z^2+60)}{12(z^2+10)-z(z^2+60)},\quad r=0{,}9\cdot 10^{-8}. \qquad 11(160)$$

2°. Вычисление e^x с фиксированной запятой:

$$e^x = 2^p \cdot (e^z)^2,$$

$$\text{при } \left\{\frac{x}{\ln 2}\right\} < 0 \quad z = \frac{\ln 2}{2}\left\{\frac{x}{\ln 2}\right\}, \quad p = \left[\frac{x}{\ln 2}\right],$$

$$\text{при } \left\{\frac{x}{\ln 2}\right\} \geqslant 0 \quad z = \frac{\ln 2}{2}\left(\left\{\frac{x}{\ln 2}\right\} - 1\right), \quad p = \left[\frac{x}{\ln 2}\right] + 1,$$

11 (192)

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \left|\frac{z^k}{k!}\right| \leqslant 2^{-28}, \text{ точность вычислений до } 2^{-32}.$$

11 (193)

3. Вычисление $\ln x$ $\left(\frac{1}{2} \leqslant x < 1\right)$. 1°. Вычисление с плавающей запятой.

$$\ln x \approx -\frac{1}{2}\ln 2 + \sum_{k=0}^{2} a_{2k+1} u^{2k+1}, \quad u = \frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x + \frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Коэффициенты a_{2k+1} приведены в гл. II, § 2, п. 6, 2°. Точность до $0{,}3 \cdot 10^{-7}$.

2°. Вычисление $\ln x$ с фиксированной запятой.

$$\ln x = -\frac{1}{2}\ln 2 + \ln(\sqrt{2} \cdot x).$$

Вычисление ведется по формуле

$$\ln(\sqrt{2}x) \approx \sum_{k=0}^{3} a_{2k+1} u^{2k+1}, \quad u = 2\,\frac{x - \sqrt{\frac{1}{2}}}{x + \sqrt{\frac{1}{2}}},$$

$$a_{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)\,2^{2k}}.$$

11 (189)

4. Вычисление $\sin x$ и $\cos x$. Задача сводится к вычислению косинуса угла, расположенного в первой четверти,

$$\cos\frac{\pi}{2}x \approx \sum_{k=0}^{4} a_{2k} x^{2k}.$$

Коэффициенты a_{2k} приведены в гл. III, § 1, п. 6, 8°, б). Точность до $5 \cdot 10^{-8}$ для $0 \leqslant x \leqslant 1$.

5. Вычисление $\operatorname{arctg} x$ **(с плавающей запятой).** При $|x| \leqslant 1$

$$\operatorname{arctg} x \approx \sum_{k=0}^{8} a_{2k+1} x^{2k+1}. \qquad 11\,(166)$$

Коэффициенты a_{2k+1} приведены в гл. III, § 2, п. 4, 8°. Точность: $5 \cdot 10^{-8}$.

При $|x| > 1$ $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Примечание. Прежде при вычислении тригонометрических функций пользовались формулами

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{x}{2 - \frac{x^2}{6 - \frac{x^2}{10 - \frac{x^2}{14}}}},$$

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

а также формулами удвоения угла

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1, \quad \sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x.$$

Для вычисления e^x и e^{-x} применялись формулы

$$e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

Вычисление $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ аналогично вычислению $\cos x$ и $\sin x$.

§ 4. М-3

1. Вычисление $\sqrt{x}$**.** Для вычисления $\sqrt{x}$ применяется итерационный процесс Герона (см. гл. I, § 3, п. 6,1°) с начальным значением $y_0 = 0{,}5903x + 0{,}4173$.

Для вычисления $\sqrt{x}$ с точностью до 2^{-32} требуются две итерации.

2. Вычисление e^x**.**

$$e^x = 2^{\left[\frac{x}{\ln 2}\right]}(e^z)^4, \quad z = \left\{\frac{x}{\ln 2}\right\}\frac{\ln 2}{4}, \quad |z| \leqslant \frac{\ln 2}{4},$$

$$e^z = \frac{12(z^2 + 10) + z(z^2 + 60)}{12(z^2 + 10) - z(z^2 + 60)}, \quad r = 10^{-10}.$$

3. Вычисление $\ln x$ $\left(\frac{1}{2} \leqslant x < 1\right)$.

$$\ln x = \ln 2\left[-\frac{1}{2}+P(t)\right], \quad P(t)=\sum_{k=0}^{3} a_{2k+1}u^{2k+1}, \quad u=\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Коэффициенты a_{2k+1} приведены в гл. II, § 2, п. 6, 4°. Точность: 2^{-32}.

4. Вычисление тангенса и котангенса.

1°. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x=\frac{z}{z\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}z} \quad (|x|<1)$, если $uv \geqslant 0$,

$$u=\left\{\frac{x}{\pi}-\frac{1}{4}\right\}, \quad v=|u|-\frac{1}{2},$$

$$z=4|v|-1=\left|4\cdot\left|\left\{\frac{x}{\pi}-\frac{1}{4}\right\}\right|-2\right|-1.$$

2°. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x=\frac{z\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}z}{z} \quad (|x|<1)$ если $uv<0$.

$$z\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}z \approx \sum_{k=0}^{5} a_{2k}z^{2k}.$$

Коэффициенты a_{2k} можно взять из гл. III, § 1, п. 6, 11°.

5. Вычисление $\operatorname{arctg} x$ $(0 < x \leqslant 1)$.

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} z + c \begin{cases} \text{если } |x| < 2-\sqrt{3}, \text{ то } z=x,\ c=0, \\ \text{если } |x| \geqslant 2-\sqrt{3}, \text{ то } z=\dfrac{x-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{x}{\sqrt{3}}}, \\ \qquad c=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{6}, \end{cases}$$

$$\operatorname{arctg} z=\sum_{k=0}^{4} a_{2k+1}z^{2k+1}.$$

Коэффициенты a_{2k+1} могут быть взяты из гл. III, § 2, п.4,7°. Точность: 2^{-32}.

§ 5. «Урал»

1. Вычисление $\sqrt{x}$ $\left(\frac{1}{2} \leqslant x < 1\right)$ **(с фиксированной запятой).** Вычисляется по итерационной формуле Герона (гл. I, § 3, п. 6,1°) с начальным приближением $y_0 = 0{,}57422x + 0{,}42578$. 3 (282)

2. Вычисление $\frac{1}{4}e^x$ $(|x| < 1)$ **(с фиксированной запятой).** Вычисление производится на основе степенного ряда

$$\frac{1}{4}e^x \approx \sum_{k=0}^{10} a_k x^k.$$

Коэффициенты a_k приведены в гл. II, § 1, п. 4, 1°, г).

3. Вычисление $\frac{1}{25}\ln x$ $(2^{-35} < x < 1)$ **(с фиксированной запятой).**

$$\ln x \approx z \sum_{k=0}^{5} a_{2k} u^{2k}, \quad u = 3\frac{x-1}{x+1}.$$

Коэффициенты a_{2k} приведены в гл. II, § 2, п. 6, 5°.

4. Вычисление $\sin x$ $\left(|x| < \frac{\pi}{2}\right)$ **(с фиксированной запятой).**

$$\sin x \approx 2 \sum_{k=0}^{5} a_{2k+1} x^{2k+1}.$$

Значения коэффициентов a_{2k+1} равны соответственно половинам значений коэффициентов, приведенных в гл. III, § 1, п. 6, 3°, в).

5. Вычисление $\cos x$ $\left(|x| < \frac{\pi}{2}\right)$ **(с фиксированной запятой).**

$$\cos x \approx 2 \sum_{k=0}^{5} a_{2k} x^{2k}. \qquad 3\,(289)$$

Точность: $5 \cdot 10^{-10}$.

Значения коэффициентов a_{2k} равны соответственно половинам значений коэффициентов разложения, приведенного в гл. III, § 1, п. 6, 9°, б).

6. Вычисление $\sin x$ и $\cos x$ $\left(|x| < \frac{\pi}{2}\right)$ (с фиксированной запятой). Вычисление $\sin x$ и $\cos x$ приводится к вычислению $\sin \frac{\pi}{2} y$ $(|y| < 1)$:

$$\sin \frac{\pi}{2} y \approx y + \sum_{k=0}^{5} a_{2k+1} y^{2k+1}.$$

Значения коэффициентов a_{2k+1} $(k = 1, \ldots, 5)$ совпадают с коэффициентами, приведенными в гл, III, § 1, п. 6, 2°, г), а коэффициент a_1 $(k = 0)$ на 1 меньше приведенного там же коэффициента.

7. Вычисление $\operatorname{tg} x$ $\left(0 \leqslant x < \frac{\pi}{4}\right)$. 1°. Вычисление $\operatorname{tg} x$ с фиксированной запятой

$$\operatorname{tg} x \approx x \frac{a_0 + (a_1 + a_2 x^2) x^2}{a_0 + [a_3 + (a_4 + a_5 x^2) x^2] x^2}.$$

Коэффициенты a_k приведены в гл. III, § 1, п. 8,10°.

2°. Вычисление $\operatorname{tg} x$ с плавающей запятой. При

$$|x| < \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \pi y, \quad y \leqslant \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{tg} \pi y \approx y \frac{\sum_{k=0}^{2} a_k y^{2k}}{\sum_{k=0}^{3} b_k y^{2k}}. \qquad 3(337)$$

Коэффициенты a_k и b_k приведены в гл. III, § 1, п. 8, 8°.

8. Вычисление $\frac{1}{2} \arcsin x$ $\left(|x| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (с фиксированной запятой).

$$\frac{1}{2} \arcsin x \approx \sum_{k=0}^{10} a_{2k+1} x^{2k+1}. \qquad 3(295)$$

Значения коэффициентов a_{2k+1} равны соответственно половинам значений коэффициентов разложения, приводимого в гл. III, § 2, п. 4, 3°.

При $\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1$

$$\frac{1}{2}\arcsin x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin\sqrt{1-x^2}.$$

При $-1 < x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{1}{2}\arcsin x = -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin\sqrt{1-x^2}\right).$$

$\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{1-x^2}$ вычисляется по приведенному выше ряду.

9. Вычисление $\frac{1}{4}\arccos x$ (с фиксированной запятой).

$$\frac{1}{4}\arccos x = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\arcsin x;$$

$\frac{1}{4}\arcsin x$ вычисляется по подпрограмме $\frac{1}{2}\arcsin x$. 3(299)

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. СПЕЦИАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ И ДРУГИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Гудерманиан (гиперболическая амплитуда)

1. Между гиперболическими и тригонометрическими функциями можно установить зависимость без участия мнимого аргумента с помощью специального угла γ, называемого *гудерманианом* или *гиперболической амплитудой*, положив $\operatorname{sh} x = \operatorname{tg} \gamma$. Это приводит к следующим соотношениям между всеми гиперболическими функциями аргумента x и соответствующими тригонометрическими функциями аргумента γ:

1°. $\operatorname{sh} x = \operatorname{tg} \gamma$.
2°. $\operatorname{ch} x = \sec \gamma$.
3°. $\operatorname{th} x = \sin \gamma$.
4°. $\operatorname{cth} x = \operatorname{cosec} \gamma$.
5°. $\operatorname{sch} x = \cos \gamma$.
6° $\operatorname{csch} x = \operatorname{ctg} \gamma$.

Имеет место соотношение между функциями половинных аргументов $\frac{x}{2}$ и $\frac{\gamma}{2}$:

7°. $\operatorname{th} \frac{x}{2} = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$.

Для гудерманиана γ, соответствующего аргументу x гиперболической функции, применяются обозначения:

8°. $\gamma = \operatorname{gd} x = \operatorname{amph} x$.

Если пользоваться символом гудерманиана, то приведенные выше формулы записываются так:

9°. $\operatorname{sh} x = \operatorname{tg} (\operatorname{gd} x)$.
10°. $\operatorname{ch} x = \sec (\operatorname{gd} x)$.
11°. $\operatorname{th} x = \sin (\operatorname{gd} x)$.
12°. $\operatorname{cth} x = \operatorname{cosec} (\operatorname{gd} x)$.
13°. $\operatorname{sch} x = \cos (\operatorname{gd} x)$.
14°. $\operatorname{csch} x = \operatorname{ctg} (\operatorname{gd} x)$.
15°. $\operatorname{th} \frac{x}{2} = \operatorname{tg} \frac{\operatorname{gd} x}{2}$.

Исходя из формулы $e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$, получим

16° $e^x = \sec\gamma + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) =$

$$= \frac{1+\sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{1+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}. \qquad 4\,(57)$$

Можно ввести также функцию, обратную гудерманиану. Если $\gamma = \operatorname{gd} x$, то обратная функция (*обратный гудерманиан*) x обозначается символом

17°. $x = \operatorname{arg\,gd} \gamma$.

Если известен аргумент x, то можно найти гудерманиан γ и, наоборот, по формулам:

18°. $\gamma = \operatorname{gd} x = 2\operatorname{arctg} e^x - \frac{\pi}{2} = 2\operatorname{arctg}\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\right) = \int\limits_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch} t}$. 12 (73)

19°. $x = \operatorname{arg\,gd}\gamma = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) = \int\limits_0^\gamma \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$. 12 (73)

Понятие гудерманиана обобщается на случай мнимого аргумента. Исходя из равенства $\gamma = \operatorname{gd} x$, получим соотношение

20° $ix = \operatorname{gd} i\gamma$. 12 (74)

При $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, $x = x_1 + ix_2$ имеем:

21°

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = \frac{\operatorname{sh} x_1}{\cos x_2}, \quad \operatorname{th} x_1 = \frac{\sin\gamma_1}{\operatorname{ch}\gamma_2}, \quad \operatorname{th}\gamma_2 = \frac{\sin x_2}{\operatorname{ch} x_1}, \quad \operatorname{tg} x_2 = \frac{\operatorname{sh}\gamma_2}{\cos\gamma_1} \qquad 12\,(74)$$

2. Представление в виде рядов.

1°. $\gamma = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{\operatorname{ch} x} + \frac{1}{2\cdot 3\operatorname{ch}^3 x} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5\operatorname{ch}^5 x} + \right.$

$$\left. + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\operatorname{ch}^7 x} + \ldots\right) \qquad 11\,(37)$$

2°. $\gamma = 2\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\operatorname{th}^{2k+1}\frac{x}{2} = 2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\operatorname{tg}^{2k+1}\frac{\gamma}{2}$. 4 (57)

3°. $\gamma = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{24} - \frac{61x^7}{5040} + \ldots + \frac{(-1)^k E_k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \ldots$ *)

$$\left(|x| < \frac{\pi}{2}\right) \qquad 12\,(74)$$

*) E_k — числа Эйлера (см. [I], стр. 359).

4°. $\gamma = x - \frac{4}{3}\operatorname{th}^3\frac{x}{2} - \frac{4}{7}\operatorname{th}^7\frac{x}{2} - \ldots \quad \left(\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right| < 1\right).$ 11 (37)

5°. $x = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\operatorname{tg}^{2k+1}\frac{\gamma}{2} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\operatorname{th}^{2k+1}\frac{x}{2}.$ 4 (57)

6°. $x = \gamma + \frac{\gamma^3}{6} + \frac{\gamma^5}{24} + \frac{61\gamma^7}{5040} + \ldots$

$+ \frac{E_k}{(2k+1)!}\gamma^{2k+1} + \ldots \left(|\gamma| < \frac{\pi}{2}\right)$ 12 (74)

7°. $x = \gamma + \frac{4}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\gamma}{2} + \frac{4}{7}\operatorname{tg}^7\frac{\gamma}{2} + \ldots \quad \left(\left|\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right| < 1\right)$ 11 (37)

Для малых значений x и γ имеем:

8°. $\gamma \approx x - \frac{x^3}{6\sqrt{\operatorname{ch} x}}$ 11 (39)

9° $x \approx \gamma + \frac{\gamma^3}{6\sqrt{\cos\gamma}}.$ 11 (39)

Для больших значений x и γ имеем:

10°. $\gamma = \operatorname{gd} x \approx \begin{cases} 1{,}5706 & \text{при} \quad 9{,}00 < x \leqslant 9{,}52, \\ 1{,}5707 & \text{при} \quad 9{,}52 < x \leqslant 10{,}67, \\ 1{,}5708 & \text{при} \quad 10{,}67 < x < +\infty. \end{cases}$ 3 (207)

11°. $x = \operatorname{arg\,gd}\gamma \approx 5{,}298 - \ln 100\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \approx$

$\approx 5{,}298 - \ln 100\,(1{,}570796 - \gamma)$ при $\gamma > 1{,}554.$ 3 (208)

3. Производные и интегралы.

1°. $\frac{d\gamma}{dx} = \frac{d}{dx}(\operatorname{gd} x) = \operatorname{sch} x.$

2°. $\frac{dx}{d\gamma} = \frac{d}{d\gamma}(\operatorname{arg\,gd}\gamma) = \sec\gamma.$

3°. $\int\frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{gd} x + C = 2\operatorname{arctg} e^x + C_1 = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) + C =$

$= \arcsin(\operatorname{th} x) + C.$ 4 (104)

4°. $\int\frac{d\gamma}{\cos\gamma} = \operatorname{arg\,gd}\gamma + C = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C.$

4. Значения функции $\frac{2}{\pi}\operatorname{gd}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. 12 (74)

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$\frac{2}{\pi}\operatorname{gd}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$	0,09959	0,19679	0,2895	0,3760	0,4553	0,5269	0,5907
x	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
$\frac{2}{\pi}\operatorname{gd}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$	0,6470	0,6898	0,7390	0,7761	0,8081	0,8357	0,8594
x	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	
$\frac{2}{\pi}\operatorname{gd}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$	0,8797	0,8971	0,9120	0,9248	0,9357	0,9450	

§ 2. Гармонические многочлены

1. Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ *), называются *гармоническими*. Многочлены, являющиеся гармоническими функциями, называются *гармоническими многочленами*. Любой гармонический многочлен представляет собой линейную комбинацию однородных гармонических многочленов $H_n^{(0)}(x, y)$ и $H_n^{(1)}(x, y)$, которые определяются как действительная и мнимая части функции z^n, где $z=x+iy$.

$$1^\circ.\ H_n^{(0)}(x, y)=\operatorname{Re}\left[(x+iy)^n\right]=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\binom{n}{2k}x^{n-2k}y^{2k}=$$
$$=x^n-C_n^2x^{n-2}y^2+C_n^4x^{n-4}y^4-C_n^6x^{n-6}y^6+$$
$$+C_n^8x^{n-8}y^8-\ldots$$

*) Непрерывные и имеющие непрерывные частные производные первого и второго порядков.

2°. $H_n^{(1)}(x, y) = \mathrm{Im}\,[(x+iy)^n] =$

$$= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^k \binom{n}{2k+1} x^{n-2k-1} y^{2k+1} =$$

$$= nx^{n-1}y - C_n^3 x^{n-3}y^3 + C_n^5 x^{n-5}y^5 - C_n^7 x^{n-7}y^7 + \ldots$$

2. Некоторые гармонические многочлены.

1°. $H_0^{(0)}(x, y) = 1.$

2°. $H_1^{(0)}(x, y) = x.$

3°. $H_2^{(0)}(x, y) = x^2 - y^2.$

4°. $H_3^{(0)}(x, y) = x(x^2 - 3y^2).$

5°. $H_4^{(0)}(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4.$

6°. $H_5^{(0)}(x, y) = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4.$

7°. $H_6^{(0)}(x, y) = x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6.$

8°. $H_7^{(0)}(x, y) = x^7 - 21x^5y^2 + 35x^3y^4 - 7xy^6.$

9°. $H_1^{(1)}(x, y) = y.$

10°. $H_2^{(1)}(x, y) = 2xy.$

11°. $H_3^{(1)}(x, y) = y(3x^2 - y^2).$

12°. $H_4^{(1)}(x, y) = 4xy(x^2 - y^2).$

13°. $H_5^{(1)}(x, y) = 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5.$

14°. $H_6^{(1)}(x, y) = 6x^5y - 20x^3y^3 + 6xy^5.$

15°. $H_7^{(1)}(x, y) = 7x^6y - 35x^4y^3 + 21x^2y^5 - y^7.$

3. При переходе к полярным координатам ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) получаем:

1°. $H_n^{(0)}(x, y) = H_n^{(0)}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r^n \cos n\varphi.$

2°. $H_n^{(1)}(x, y) = H_n^{(1)}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r^n \sin n\varphi.$

Отсюда при $r = 1$ имеем:

3°. $\cos n\varphi = H_n^{(0)}(\cos\varphi, \sin\varphi) = \sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k C_n^{2k} \cos^{n-2k}\varphi \sin^{2k}\varphi.$

4°. $\sin n\varphi = H_n^{(1)}(\cos\varphi,\ \sin\varphi) =$

$$= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^k C_n^{2k+1} \cos^{n-2k-1}\varphi \sin^{2k+1}\varphi.$$

5°. $$\operatorname{tg} n\varphi = \frac{H_n^{(1)}(1,\ \operatorname{tg}\varphi)}{H_n^{(0)}(1,\ \operatorname{tg}\varphi)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^k C_n^{2k+1} \operatorname{tg}^{2k+1}\varphi}{\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k C_n^{2k} \operatorname{tg}^{2k}\varphi}.$$

6°. $$\operatorname{ctg} n\varphi = \frac{H_n^{(0)}(\operatorname{ctg}\varphi,\ 1)}{H_n^{(1)}(\operatorname{ctg}\varphi,\ 1)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k C_n^{2k} \operatorname{ctg}^{n-2k}\varphi}{\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^k C_n^{2k+1} \operatorname{ctg}^{n-2k-1}\varphi}.$$

В частности:

7°. $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$.

8°. $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$.

9°. $\cos 4\varphi = 8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1$.

10°. $\cos 5\varphi = 16\cos^5\varphi - 20\cos^3\varphi + 5\cos\varphi$.

11°. $\cos 6\varphi = 32\cos^6\varphi - 48\cos^4\varphi + 18\cos^2\varphi - 1$.

12°. $\cos 7\varphi = 64\cos^7\varphi - 112\cos^5\varphi + 56\cos^3\varphi - 7\cos\varphi$.

13°. $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$.

14°. $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$.

15°. $\sin 4\varphi = \cos\varphi\,(4\sin\varphi - 8\sin^3\varphi)$.

16°. $\sin 5\varphi = 5\sin\varphi - 20\sin^3\varphi + 16\sin^5\varphi$.

17°. $\sin 6\varphi = \cos\varphi\,(6\sin\varphi - 32\sin^3\varphi + 32\sin^5\varphi)$.

18°. $\sin 7\varphi = 7\sin\varphi - 56\sin^3\varphi + 112\sin^5\varphi - 64\sin^7\varphi$.

19°. $\operatorname{tg} 2\varphi = \dfrac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi}$.

20°. $\operatorname{tg} 3\varphi = \dfrac{3\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}^3\varphi}{1 - 3\operatorname{tg}^2\varphi}$.

21°. $\operatorname{tg} 4\varphi = \dfrac{4\operatorname{tg}\varphi - 4\operatorname{tg}^3\varphi}{1 - 6\operatorname{tg}^2\varphi + \operatorname{tg}^4\varphi}$.

22°. $\operatorname{ctg} 2\varphi = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\varphi - 1}{2\operatorname{ctg}\varphi}$.

23°. $\operatorname{ctg} 3\varphi = \dfrac{\operatorname{ctg}^3\varphi - 3\operatorname{ctg}\varphi}{3\operatorname{ctg}^2\varphi - 1}$.

24°. $\operatorname{ctg} 4\varphi = \dfrac{\operatorname{ctg}^4\varphi - 6\operatorname{ctg}^2\varphi + 1}{4\operatorname{ctg}^3\varphi - 4\operatorname{ctg}\varphi}$.

§ 3. Гипергеометрическая функция

1. *Гипергеометрическим рядом* или *гипергеометрической функцией* называется степенной ряд вида

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Основанием для такого названия является то, что в частном случае, когда $\alpha=1$, $\beta=\gamma$, этот ряд превращается в геометрический ряд $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots$

Если $|x|<1$, то гипергеометрический ряд абсолютно сходится, а если $|x|>1$, то он расходится. Для $x=\pm 1$ сходимость гипергеометрического ряда зависит от числа $\gamma-\alpha-\beta$, а именно: при $x=1$ ряд абсолютно сходится, если $\gamma-\alpha-\beta>0$, и расходится, если $\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$; при $x=-1$ ряд абсолютно сходится, если $\gamma-\alpha-\beta>0$, условно сходится, если $-1<\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$, и расходится, если $\gamma-\alpha-\beta\leqslant -1$.

Если α или β равно отрицательному целому числу или нулю, то гипергеометрический ряд обрывается на некотором месте и становится конечным рядом (многочленом). Если γ равно отрицательному целому числу или нулю, $\gamma=-n$, то гипергеометрический ряд неопределен при условии, что ни α, ни β не равны отрицательному целому числу: $\alpha\neq -m$, $\beta\neq -m$, причем $m<n$.

2. Общее решение гипергеометрического дифференциального уравнения

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0,$$

где γ не равно целому числу, выражается через гипергеометрические функции

$$y = C_1F(\alpha, \beta, \gamma; x) + C_2x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma; x). \qquad 4\,(421)$$

3. Некоторые частные значения гипергеометрической функции и их обозначения.

1°. $F\left(1, 1, \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$. 4 (418)

2°. $F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} = A$ 6 (57)

($\gamma-\alpha-\beta>0$, γ не нуль и не целое отрицательное число).

3°. $F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = B.$ 6 (57)

4°. $F(\alpha, \gamma-\beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} = C.$ 6 (59)

5°. $F(\gamma-\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} = D.$ 6 (59)

4. Формулы Больца.

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x)=A\cdot F(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta-\gamma+1;\ 1-x)+$$
$$+B\cdot(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma-\alpha-\beta+1;\ 1-x); \qquad 6(59)$$
$$=(1-x)^{-\alpha}F\left(\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma;\ \frac{x}{x-1}\right)=$$
$$=(1-x)^{-\beta}F\left(\gamma-\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ \frac{x}{x-1}\right); \qquad 6(59)$$
$$=C(1-x)^{-\alpha}F\left(\alpha,\ \gamma-\beta,\ \alpha-\beta+1;\ \frac{1}{1-x}\right)+$$
$$+D(1-x)^{-\beta}F\left(\gamma-\alpha,\ \beta,\ \beta-\alpha+1;\ \frac{1}{1-x}\right); \qquad 6(59)$$
$$=Ax^{-\alpha}F\left(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha+\beta-\gamma+1;\ \frac{x-1}{x}\right)+$$
$$+B\cdot x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\times$$
$$\times F\left(\gamma-\alpha,\ 1-\alpha,\ \gamma-\alpha-\beta+1;\ \frac{x-1}{x}\right); \qquad 6(59)$$
$$=C(-x)^{-\alpha}F\left(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1;\ \frac{1}{x}\right)+$$
$$+D(-x)^{-\beta}F\left(\beta-\gamma+1,\ \beta,\ \beta-\alpha+1;\ \frac{1}{x}\right). \qquad 6(59)$$

5. Некоторые соотношения.

1°. $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ 1)=F(-\alpha,\ -\beta,\ \gamma-\alpha-\beta;\ 1)\quad(\gamma>0).$ 4 (418)

2°. $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ 1)=\dfrac{1}{F(-\alpha,\ \beta,\ \gamma-\alpha;\ 1)}\quad(\gamma-\beta>0).$ 4 (418)

3°. $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ 1)=\dfrac{1}{F(\alpha,\ -\beta,\ \gamma-\beta;\ 1)}\quad(\gamma-\alpha>0).$ 4 (418)

6. Рекуррентные формулы.

1°. $(\alpha-\beta)F(\alpha,\beta,\gamma;\ x)-\alpha F(\alpha+1,\beta,\gamma;\ x)+\beta F(\alpha,\beta+1,\gamma;\ x)=0.$ 6 (53)

2°. $(1-\gamma)F(\alpha,\ \beta,\ \gamma-1;\ x)-(\alpha-\gamma+1)F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x)+\alpha F(\alpha+1,\ \beta,\ \gamma;\ x)=0.$ 6 (53)

3°. $(\beta-\alpha)(1-x)F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x)+(\alpha-\gamma)F(\alpha-1,\ \beta,\ \gamma;\ x)+(\gamma-\beta)F(\alpha,\ \beta-1,\ \gamma;\ x)=0.$ 6 (53)

4°. $(\gamma-\alpha)F(\alpha-1,\ \beta,\ \gamma;\ x)+[2\alpha-\gamma-(\alpha-\beta)x]F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x)+\alpha(x-1)F(\alpha+1,\ \beta,\ \gamma;\ x)=0.$ 6 (53)

5°. $\gamma(\gamma-1)(x-1)F(\alpha,\ \beta,\ \gamma-1;\ x)+\gamma[\gamma-1-(2\gamma-\alpha-\beta-1)x]F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x)+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)x\cdot F(\alpha,\ \beta,\ \gamma+1;\ x)=0.$ 6 (53)

7. Интегральные представления.

1°. $F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}\,dt$

$(0 < \alpha < \gamma)$. 6 (53)

2°. $F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int\limits_1^\infty t^{\beta-\gamma}(t-1)^{\gamma-\alpha-1}(t-x)^{-\beta}\,dt.$

6 (55)

8. Представление элементарных функций через гипергеометрическую функцию.

1°. $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k = F(-n, 1, -n; x).$ 2 (615)

2°. $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{k!} x^k = F(\alpha, -n, -n; x) =$

$= F(-n, \alpha, -n; x).$ 2 (614)

3°. $(1+x)^n = F(-n, \beta, \beta; -x) = F(-n, 1, 1; -x).$ 2 (614)

4°. $(1-x)^{-n} = F(n, \beta, \beta; x).$ 6 (61)

5°. $(1-x)^{-1} = F(1, 1, 1; x) = F(1, \beta, \beta; x) = F(\alpha, 1, \alpha; x).$ 2 (614)

6°. $\frac{1-(1-x)^n}{nx} = F(1-n, 1, 2; x).$ 2 (614)

7°. $\frac{(1+x)^n + (1-x)^n}{2} = F\left(-\frac{n}{2}, -\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}; x^2\right)$ 2 (615)

8° $\frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{2nx} = F\left(-\frac{n-1}{2}, -\frac{n}{2}+1, \frac{3}{2}; x^2\right).$ 2 (615)

9°. $\frac{\ln(1+x)}{x} = F(1, 1, 2; -x).$ 2 (615)

10°. $\frac{\ln(1-x)}{x} = -F(1, 1, 2; x).$ 6 (61)

11°. $\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x} = F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; x^2\right).$ 2 (615)

12°. $\frac{x}{\sin x} = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \sin^2 x\right).$ 4 (417)

13°. $\frac{2x}{\sin 2x} = F\left(1, 1, \frac{3}{2}; \sin^2 x\right).$ 4 (417)

14°. $\frac{x}{\operatorname{tg} x} = F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; -\operatorname{tg}^2 x\right).$ 4 (417)

15°. $\dfrac{\arcsin x}{x}=F\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2};\ x^2\right).$ 2 (615)

16°. $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=F\left(\dfrac{1}{2},\ 1,\ \dfrac{3}{2};\ -x^2\right).$ 2 (615)

17°. $\dfrac{\operatorname{Arsh} x}{x}=F\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2};\ -x^2\right).$ 4 (417)

18° $\dfrac{\sin nx}{n\sin x}=F\left(\dfrac{n+1}{2},\ -\dfrac{n-1}{2},\ \dfrac{3}{2};\ \sin^2 x\right).$ 14 (8)

19°. $\dfrac{2\sin nx}{n\sin 2x}=F\left(\dfrac{n+2}{2},\ -\dfrac{n-2}{2},\ \dfrac{3}{2};\ \sin^2 x\right).$ 4 (417)

20°. $\cos nx=F\left(\dfrac{n}{2},\ -\dfrac{n}{2},\ \dfrac{1}{2};\ \sin^2 x\right)$ 14 (8)

21°. $\cos nx\cos^n x=F\left(\dfrac{n+1}{2},\ \dfrac{n}{2},\ \dfrac{1}{2};\ -\operatorname{tg}^2 x\right).$ 4 (417)

22°. $\dfrac{1}{\cos x}=F\left(\dfrac{1}{2},\ 1,\ 1;\ \sin^2 x\right).$ 4 (417)

23°. $\dfrac{\cos nx}{\cos x}=F\left(\dfrac{n+1}{2},\ -\dfrac{n-1}{2},\ \dfrac{1}{2};\ \sin^2 x\right).$ 14 (8)

24° $\dfrac{\cos nx}{\cos^n x}=F\left(-\dfrac{n}{2},\ -\dfrac{n-1}{2},\ \dfrac{1}{2};\ -\operatorname{tg}^2 x\right).$ 14 (8)

25°. $\dfrac{\sin nx}{n\sin x\cos^{n-1} x}=F\left(-\dfrac{n-2}{2},\ -\dfrac{n-1}{2},\ \dfrac{3}{2};\ -\operatorname{tg}^2 x\right).$ 4 (417)

26°. $\dfrac{\sin(n\arcsin x)}{nx}=F\left(\dfrac{n+1}{2},\ -\dfrac{n-1}{2},\ \dfrac{3}{2};\ x^2\right).$ 14 (8)

27°. $\dfrac{\sin(n\arcsin x)}{nx\sqrt{1-x^2}}=F\left(1+\dfrac{n}{2},\ 1-\dfrac{n}{2},\ \dfrac{3}{2};\ x^2\right).$ 14 (8)

28°. $\cos(n\arcsin x)=F\left(\dfrac{n}{2},\ -\dfrac{n}{2},\ \dfrac{1}{2};\ x^2\right).$ 14 (8)

29° $\dfrac{\cos(n\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}=F\left(\dfrac{n+1}{2},\ -\dfrac{n-1}{2},\ \dfrac{1}{2};\ x^2\right).$ 14 (8)

9. Элементарные функции как пределы гипергеометрической функции.

1°. $$e^x=\lim_{k\to\infty}F\left(1,\ k,\ 1;\ \frac{x}{k}\right)=1+x\lim_{k\to\infty}F\left(1,\ k,\ 2;\ \frac{x}{k}\right)=$$
$$=1+x+\frac{x^2}{2}\lim_{k\to\infty}F\left(1,\ k,\ 3,\ \frac{x}{k}\right).$$ 4 (417)

2°. $$\cos x=\lim_{\substack{k\to\infty\\ k'\to\infty}}F\left(k,\ k',\ \frac{1}{2};\ -\frac{x^2}{4kk'}\right).$$ 4 (417)

3°. $\operatorname{ch} x = \lim\limits_{\substack{k\to\infty\\ k'\to\infty}} \left(k,\ k',\ \frac{1}{2};\ \frac{x^2}{4kk'}\right)$ 4 (417)

4°. $\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{\substack{k\to\infty\\ k'\to\infty}} F\left(k,\ k',\ \frac{3}{2};\ -\frac{x^2}{4kk'}\right).$ 4 (417)

5°. $\frac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim\limits_{\substack{k\to\infty\\ k'\to\infty}} F\left(k,\ k',\ \frac{3}{2};\ \frac{x^2}{4kk'}\right).$ 4 (417)

10. Производные гипергеометрической функции.

1°. $\frac{d}{dx} F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+1;\ x)$ (γ не равно никакому целому числу $\leqslant 0$). 6 (52)

2°. $\frac{d^2}{dx^2} F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x) = \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} F(\alpha+2, \beta+2,\ \gamma+2;\ x).$ 14 (8)

3°. $\frac{d}{dx}[x^{\alpha} F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x)] = \alpha x^{\alpha-1} F(\alpha+1,\ \beta,\ \gamma;\ x).$ 6 (52)

4°. $\frac{d}{dx}[x^{\beta} F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x)] = \beta x^{\beta-1} F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma;\ x).$ 6 (52)

5° $\frac{d}{dx}[x^{\gamma-1} F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x)] = (\gamma-1)\, x^{\gamma-2} F(\alpha,\ \beta,\ \gamma-1;\ x).$ 6 (52)

6°. $\frac{d}{dx}[x^{\gamma-\alpha}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma} F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x)] =$
$= (\gamma-\alpha)\, x^{\gamma-\alpha-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma-1} F(\alpha-1,\ \beta,\ \gamma;\ x).$ 6 (52)

§ 4. Ортогональные многочлены

Ниже приводятся некоторые многочлены Лежандра, Чебышева, Лагерра и Эрмита, расположенные по степеням аргумента x, и нули этих многочленов. Предварительно сообщаются краткие сведения о них. О свойствах этих многочленов более подробно см. в выпуске *СМБ* «Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби)», стр. 239—262.

1. Определения. 1°. Многочлены Лежандра $P_n(x)$.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!\,(n-k)!\,(n-2k)!} x^{n-2k} {}^{*)} =$$
$$= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \ldots\right].$$

*) Сумма берется для целых k от 0 до $\frac{n-1}{2}$ при нечетном n и до $\frac{n}{2}$ при четном n.

В частности,

$$P_n(1)=1,\ P_n(-1)=(-1)^n,\quad P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2},$$
$$P_{2n+1}(0)=0.$$

Соотношение между $P_n(-x)$ и $P_n(x)$:

$$P_n(-x)=(-1)^n P_n(x).$$

Многочлены Лежандра связаны с гипергеометрической функцией соотношением

$$P_n(x)=(-1)^{n-1}F\left(-n,\ n+1,\ 1;\ \frac{1-x}{2}\right).$$

2°. Смещенные многочлены Лежандра $P_n^*(x)$:

$$P_n^*(x)=(-1)^{n-1}P_n(2x-1).$$

Когда аргумент многочлена P_n изменяется в пределах от -1 до $+1$, аргумент смещенного многочлена P_n^* изменяется от 0 до $+1$.

Смещенные многочлены Лежандра $P_n^*(x)$ связаны с гипергеометрической функцией соотношением

$$P_n^*(x)=(-1)^{n-1}F(-n,\ n+1,\ 1;\ 1-x).$$

3°. Многочлены Чебышева первого рода $T_n(x)$:

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x)=x^n-\binom{n}{2}x^{n-2}(1-x^2)+$$
$$+\binom{n}{4}x^{n-4}(1-x^2)^2-\binom{n}{6}x^{n-6}(1-x^2)^3-\ldots$$

В частности,

$$T_n(1)=1,\quad T_n(-1)=(-1)^n,\quad T_{2n}(0)=(-1)^n,\quad T_{2n+1}(0)=0.$$

Многочлены Чебышева первого рода связаны с гипергеометрической функцией соотношением

$$T_n(x)=F\left(n,\ -n,\ \frac{1}{2};\ \frac{1-x}{2}\right).$$

4°. Смещенные многочлены Чебышева первого рода $T_n^*(x)$:

$$T_n^*(x)=T_n(2x-1).$$

5°. Многочлены $C_n(x)$:

$$C_n(x)=2\cos\left(n\arccos\frac{x}{2}\right).$$

6°. Многочлены Чебышева второго рода $U_n(x)$:

$$U_n(x)=\frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}=\binom{n+1}{1}x^n-\binom{n+1}{3}x^{n-2}(1-x^2)+$$
$$+\binom{n+1}{5}x^{n-4}(1-x^2)^2-\ldots=\frac{1}{n+1}\frac{d}{dx}T_{n+1}(x).$$

В частности,

$$U_{2n}(0)=(-1)^n, \quad U_{2n+1}(0)=0.$$

Многочлены Чебышева второго рода связаны с гипергеометрической функцией соотношением

$$U_n(x)=(n+1)\,F\left(-n,\ n+2,\ \frac{3}{2};\ \frac{1-x}{2}\right).$$

7°. Смещенные многочлены Чебышева второго рода $U_n^*(x)$:

$$U_n^*(x)=U_n(2x-1).$$

8° Многочлены $S_n(x)$:

$$S_n(x)=\frac{2\sin\left[(n+1)\arccos\frac{x}{2}\right]}{\sqrt{4-x^2}}.$$

9°. Соотношения между многочленами Чебышева:

$$C_n(x)=2T_n\left(\frac{x}{2}\right)=2T_n^*\left(\frac{2+x}{4}\right), \qquad T_n^*(x)=\frac{1}{2}C_n(4x-2),$$

$$S_n(x)=U_n\left(\frac{x}{2}\right)=U_n^*\left(\frac{2+x}{4}\right), \qquad U_n(x)=S_n(2x)=U_n^*\left(\frac{1+x}{2}\right),$$

$$T_n(x)=\frac{1}{2}C_n(2x)=T_n^*\left(\frac{1+x}{2}\right), \qquad U_n^*(x)=S_n(4x-2).$$

10°. Многочлены Лагерра $L_n(x)$:

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}\frac{n!}{k!}x^k=$$

$$=n!\left[1-nx+\frac{n(n-1)}{(2!)^2}x^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{(3!)^2}x^3+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}\right].$$

В частности, $L_n(0)=n!$.

11° Многочлены Эрмита $H_n(x)$:

$$H_n(x)=(-1)^ne^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\frac{2^{n-2k}\,n!}{k!\,(n-2k)!}x^{n-2k\,*)}=$$

$$=2^nx^n-2^{n-1}\binom{n}{2}x^{n-2}+2^{n-2}\cdot1\cdot3\binom{n}{4}x^{n-4}-\ldots=$$

$$=(2x)^n-\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}-\ldots,$$

---

*) Сумма берется для целых k от 0 до $\frac{n-1}{2}$ при нечетном n и до $\frac{n}{2}$ при четном n.

причем последний член равен

$$(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!}$$

при четном n и

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}2x$$

при нечетном n.

В частности,

$$H_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!},$$
$$H_{2n+1}(0)=0$$

12°. Многочлены Эрмита $h_n(x)$:

$$h_n(x)=(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)=$$
$$=x^n-\binom{n}{2}x^{n-2}+1\cdot 3\binom{n}{4}x^{n-4}-1\cdot 3\cdot 5\binom{n}{6}x^{n-6}+\ldots,$$

причем последний член равен

$$(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{n!}{2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}\right)!}$$

при четном n и

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n!}{2^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)!}x$$

при нечетном n.

13°. Соотношения между функциями $H_n(x)$ и $h_n(x)$:

$$h_n(x)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

$$H_n(x)=2^{\frac{n}{2}}h_n(x\sqrt{2}).$$

2. Производящие функции ($|t|<1$).

1°. $$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x).$$

2°. $$\frac{1-xt}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty} t^n T_n(x).$$

3°. $$\frac{1}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty} t^n U_n(x).$$

4°. $$\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L_n(x).$$

5°. $$e^{-t^2+xt}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) \qquad (|t|<\infty).$$

6°. $$e^{-\frac{t^2}{2}+xt}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} h_n(x) \qquad (|t|<\infty).$$

3. Рекуррентные формулы.

1°. $P_{n+1}(x)=[(2n+1)\,x\,P_n(x)-n\,P_{n-1}(x)]\,\dfrac{1}{n+1}$.

2°. $T_{n+1}(x)=2x\,T_n(x)-T_{n-1}(x)$.

3°. $U_{n+1}(x)=2x\,U_n(x)-U_{n-1}(x)$.

4°. $L_{n+1}(x)=(2n+1-x)\,L_n(x)-n^2L_{n-1}(x)$.

5°. $H_{n+1}(x)=2x\,H_n(x)-2n\,H_{n-1}(x)$.

6°. $h_{n+1}(x)=xh_n(x)-nh_{n-1}(x)$.

7°. $C_{n+1}(x)=x\,C_n(x)-C_{n-1}(x)$.

8°. $S_{n+1}(x)=x\,S_n(x)-S_{n-1}(x)$.

4. Дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют многочлены.

1°. $(x^2-1)\,P_n''(x)+2x\,P_n'(x)-n\,(n+1)\,P_n(x)=0$.

2°. $(1-x^2)\,T_n''(x)-xT_n'(x)+n^2\,T_n(x)=0$.

3°. $(1-x^2)\,U_n''(x)-xU_n'(x)+n^2\,U_n(x)=0$.

4°. $xL_n''(x)+(1-x)\,L_n'(x)+nL_n(x)=0$.

5°. $H_n''(x)-2xH_n'(x)+2nH_n(x)=0$.

6°. $h_n''(x)-xh_n'(x)+nh_n(x)=0$.

5. Некоторые многочлены, расположенные по степеням x.

1°. Многочлены Лежандра $P_n(x)$.

$$P_0(x)=1.$$

$$P_1(x)=x.$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1).$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x).$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3).$$

$$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x).$$

$$P_6(x)=\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5).$$

$$P_7(x)=\frac{1}{16}(429x^7-693x^5+315x^3-35x).$$

$$P_8(x)=\frac{1}{128}(6435x^8-12\,012x^6+6930x^4-1260x^2+35).$$

$$P_9(x)=\frac{1}{128}(12\,155x^9-25\,740x^7+18\,018x^5-4620x^3+315x).$$

$$P_{10}(x)=\frac{1}{256}(46\,189x^{10}-109\,395x^8+90\,090x^6-30\,030x^4+3465x^2-63).$$

$$P_{11}(x)=\frac{1}{256}(88\,179x^{11}-230\,945x^9+218\,790x^7-90\,090x^5+$$
$$+15\,015x^3-693x).$$

$$P_{12}(x)=\frac{1}{1024}(676\,039x^{12}-1\,939\,938x^{10}+2\,078\,505x^8-1\,021\,020x^6+$$
$$+225\,225x^4-18\,018x^2+231).$$

$$P_{13}(x)=\frac{1}{1024}(1\,300\,075x^{13}-4\,056\,234x^{11}+4\,849\,845x^9-2\,771\,340x^7+$$
$$+765\,765x^5-90\,090x^3+3003x).$$

$$P_{14}(x)=\frac{1}{2048}(5\,014\,575x^{14}-16\,900\,975x^{12}+22\,309\,287x^{10}-$$
$$-14\,549\,535x^8+4\,849\,845x^6-765\,765x^4+45\,045x^2-429).$$

$$P_{15}(x)=\frac{1}{2048}(9\,694\,845x^{15}-35\,102\,025x^{13}+50\,702\,925\,x^{11}-$$
$$-37\,182\,145x^9+14\,549\,535x^7-2\,909\,907x^5+255\,255x^3-6435x).$$

$$P_{16}(x)=\frac{1}{32\,768}(300\,540\,195x^{16}-1\,163\,381\,400x^{14}+1\,825\,305\,300x^{12}-$$
$$-1\,487\,285\,800x^{10}+669\,278\,610x^8-162\,954\,792x^6+$$
$$+19\,399\,380x^4-875\,160x^2+6435).$$

$$P_{17}(x)=\frac{1}{32\,768}(583\,401\,555x^{17}-2\,404\,321\,560x^{15}+4\,071\,834\,900x^{13}-$$
$$-3\,650\,610\,600x^{11}+1\,859\,107\,250x^{9}-535\,422\,888x^{7}+$$
$$+81\,477\,396x^{5}-5\,542\,680x^{3}+109\,395x).$$

$$P_{18}(x)=\frac{1}{65\,536}(2\,268\,783\,825x^{18}-9\,917\,826\,435x^{16}+$$
$$+18\,032\,411\,700x^{14}-17\,644\,617\,900x^{12}+$$
$$+10\,039\,179\,150x^{10}-3\,346\,393\,050x^{8}+$$
$$+624\,660\,036x^{6}-58\,198\,140x^{4}+2\,078\,505x^{2}-12\,155).$$

$$P_{19}(x)=\frac{1}{65\,536}(4\,418\,157\,975x^{19}-20\,419\,055\,425x^{17}+39\,671\,305\,740x^{15}-$$
$$-42\,075\,627\,300x^{13}+26\,466\,926\,850x^{11}-10\,039\,179\,150x^{9}+$$
$$+2\,230\,928\,700x^{7}-267\,711\,444x^{5}+14\,549\,535x^{3}-230\,945x).$$

$$P_{20}(x)=\frac{1}{262\,144}(34\,461\,632\,205x^{20}-167\,890\,003\,050x^{18}+$$
$$+347\,123\,905\,225x^{16}-3\,967\,130\,574\,007\,400x^{14}+273\,491\,577\,450x^{12}-$$
$$-116\,454\,478\,140x^{10}+30\,117\,537\,450x^{8}-4\,461\,857\,400x^{6}+$$
$$+334\,639\,305x^{4}-9\,699\,690x^{2}+46\,189).$$

2°. Смещенные многочлены Лежандра $P_n^*(x)$.

$P_0^*(x)=1.$

$P_1^*(x)=2x-1.$

$P_2^*(x)=-6x^2+6x-1.$

$P_3^*(x)=20x^3-30x^2+12x-1.$

$P_4^*(x)=-70x^4+140x^3-90x^2+20x-1.$

$P_5^*(x)=252x^5-630x^4+560x^3-210x^2+30x-1.$

$P_6^*(x)=-924x^6+2772x^5-3150x^4+1680x^3-420x^2+42x-1.$

$$P_7^*(x)=3432x^7-12\,012x^6+16\,632x^5-11\,550x^4+4200x^3-$$
$$-756x^2+56x-1.$$

$$P_8^*(x)=-12\,870x^8+51\,480x^7-84\,084x^6+72\,072x^5-34\,650x^4+$$
$$+9240x^3-1260x^2+72x-1.$$

$$P_9^*(x)=48\,620x^9-218\,790x^8+411\,840x^7-420\,420x^6+252\,252x^5-$$
$$-90\,090x^4+18\,480x^3-1980x^2+90x-1.$$

$$P_{10}^*(x)=-184\,756x^{10}+923\,780x^9-1\,969\,110x^8+2\,333\,760x^7-$$
$$-1\,681\,680x^6+756\,756x^5-210\,210x^4+34\,320x^3-$$
$$-2970x^2+110x-1.$$

$$P_{11}^*(x)=705\,432x^{11}-3\,879\,876x^{10}+9\,237\,800x^9-12\,471\,030x^8+$$
$$+10\,501\,920x^7-5\,717\,712x^6+2\,018\,016x^5-450\,450x^4+$$
$$+60\,060x^3-4290x^2+132x-1.$$

$$P^*_{12}(x) = -2\,704\,156x^{12} + 16\,224\,936x^{11} - 42\,678\,636x^{10} + 64\,664\,600x^9 - 62\,355\,150x^8 + 39\,907\,296x^7 - 17\,153\,136x^6 + 4\,900\,896x^5 - 900\,900x^4 + 100\,100x^3 - 6006x^2 + 156x - 1.$$

$$P^*_{13}(x) = 10\,400\,600x^{13} - 97\,603\,900x^{12} + 194\,699\,232x^{11} - 327\,202\,876x^{10} + 355\,655\,300x^9 - 261\,891\,630x^8 + 133\,024\,320x^7 - 46\,558\,512x^6 + 11\,027\,016x^5 - 1\,701\,700x^4 + 160\,160x^3 - 8190x^2 + 182x - 1.$$

$$P^*_{14}(x) = -40\,116\,600x^{14} + 280\,816\,200x^{13} - 878\,850\,700x^{12} + 1\,622\,493\,600x^{11} - 1\,963\,217\,256x^{10} + 1\,636\,014\,380x^9 - 960\,269\,310x^8 + 399\,072\,960x^7 - 116\,396\,280x^6 + 23\,279\,256x^5 - 3\,063\,060x^4 + 247\,520x^3 - 10\,920x^2 + 210x - 1.$$

$$P^*_{15}(x) = 155\,117\,520x^{15} - 1\,163\,381\,400x^{14} + 3\,931\,426\,800x^{13} - 7\,909\,656\,300x^{12} + 10\,546\,208\,400x^{11} - 9\,816\,086\,280x^{10} + 6\,544\,057\,520x^9 - 3\,155\,170\,590x^8 + 1\,097\,450\,640x^7 - 271\,591\,320x^6 + 46\,558\,512x^5 - 5\,290\,740x^4 + 371\,280x^3 - 14\,280x^2 + 240x - 1.$$

3°. Многочлены Чебышева первого рода $T_n(x)$.

$T_0(x) = 1$ (однако полагают $T_0 = \frac{1}{2}$).

$T_1(x) = x.$

$T_2(x) = 2x^2 - 1.$

$T_3(x) = 4x^3 - 3x.$

$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$

$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x.$

$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1.$

$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x.$

$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1.$

$T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x.$

$T_{10}(x) = 512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1.$

$T_{11}(x) = 1024x^{11} - 2816x^9 + 2816x^7 - 1232x^5 + 220x^3 - 11x.$

$T_{12}(x) = 2048x^{12} - 6144x^{10} + 6912x^8 - 3584x^6 + 840x^4 - 72x^2 + 1.$

$T_{13}(x) = 4096x^{13} - 13\,312x^{11} + 16\,640x^9 - 9984x^7 + 2912x^5 - 364x^3 + 13x.$

$$T_{14}(x) = 8292x^{14} - 28\,672x^{12} + 39\,424x^{10} - 26\,880x^8 + 9408x^6 - 1568x^4 + 98x^2 - 1.$$

$$T_{15}(x) = 16\,384x^{15} - 61\,440x^{13} + 92\,160x^{11} - 70\,400x^9 + 28\,800x^7 - 6048x^5 + 560x^3 - 15x.$$

$$T_{16}(x) = 32\,768x^{16} - 131\,072x^{14} + 212\,992x^{12} - 180\,224x^{10} + 84\,480x^8 - 21\,504x^6 + 2688x^4 - 128x^2 + 1.$$

$$T_{17}(x)=65\,536x^{17}-278\,528x^{15}+487\,424x^{13}-452\,608x^{11}+239\,360x^{9}-\\-71\,808x^{7}+11\,424x^{5}-816x^{3}+17x.$$

$$T_{18}(x)=131\,072x^{18}-589\,824x^{16}+1\,105\,920x^{14}-1\,118\,208x^{12}+\\+658\,944x^{10}-228\,096x^{8}+44\,352x^{6}-4320x^{4}+162x^{2}-1.$$

$$T_{19}(x)=262\,144x^{19}-1\,245\,184x^{17}+2\,490\,368x^{15}-2\,723\,840x^{13}+\\+1\,770\,496x^{11}-695\,552x^{9}+160\,512x^{7}-20\,064x^{5}+1140x^{3}-19x.$$

$$T_{20}(x)=524\,288x^{20}-2\,621\,440x^{18}+5\,570\,560x^{16}-6\,553\,600x^{14}+\\+4\,659\,200x^{12}-2\,050\,048x^{10}+549\,120x^{8}-84\,480x^{6}+\\+6600x^{4}-200x^{2}+1.$$

$$T_{21}(x)=1\,048\,576x^{21}-550\,502x^{19}+12\,386\,304x^{17}-15\,597\,568x^{15}+\\+12\,042\,240x^{13}-5\,870\,592x^{11}+1\,793\,792x^{9}-329\,472x^{7}+\\+33\,264x^{5}-1540x^{3}+21x.$$

$$T_{22}(x)=2\,097\,152x^{22}-11\,534\,336x^{20}+27\,394\,048x^{18}-36\,765\,696x^{16}+\\+30\,638\,080x^{14}-16\,400\,384x^{12}+5\,637\,632x^{10}-1\,208\,064x^{8}+\\+151\,008x^{6}-9680x^{4}+242x^{2}-1.$$

4°. Смещенные многочлены Чебышева первого рода $T_n^*(x)$.

$T_0^*(x)=1$ (однако полагают $T_0^*=\frac{1}{2}$).

$T_1^*(x)=2x-1.$

$T_2^*(x)=8x^2-8x+1.$

$T_3^*(x)=32x^3-48x^2+18x-1.$

$T_4^*(x)=128x^4-256x^3+160x^2-32x+1.$

$T_5^*(x)=512x^5-1280x^4+1120x^3-400x^2+50x-1.$

$T_6^*(x)=2048x^6-6144x^5+6912x^4-3584x^3+840x^2-72x+1.$

$$T_7^*(x)=8192x^7-28\,672x^6+39\,424x^5-26\,880x^4+9408x^3-1568x^2+\\+98x-1.$$

$$T_8^*(x)=32\,768x^8-131\,072x^7+212\,992x^6-180\,244x^5+84\,480x^4-\\-21\,504x^3+2688x^2-128x+1.$$

$$T_9^*(x)=131\,072x^9-589\,824x^8+1\,105\,920x^7-1\,118\,208x^6+658\,944x^5-\\-228\,096x^4+44\,352x^3-4320x^2+162x-1.$$

$$T_{10}^*(x)=524\,288x^{10}-2\,621\,440x^9+5\,570\,560x^8-6\,553\,600x^7+\\+4\,659\,200x^6-2\,050\,048x^5+549\,120x^4-84\,480x^3+\\+6600x^2-200x+1.$$

$$T_{11}^{*}(x)=2\,097\,152x^{11}-11\,534\,336x^{10}+27\,394\,048x^{9}-36\,765\,696x^{8}+$$
$$+30\,638\,080x^{7}-16\,400\,384x^{6}+5\,637\,632x^{5}-1\,208\,064x^{4}+$$
$$+151\,008x^{3}-9680x^{2}+242x-1.$$

$$T_{12}^{*}(x)=8\,388\,608x^{12}-50\,331\,648x^{11}+132\,120\,576x^{10}-199\,229\,440x^{9}+$$
$$+190\,513\,152x^{8}-120\,324\,096x^{7}+50\,692\,096x^{6}-$$
$$-14\,057\,472x^{5}+2\,471\,040x^{4}-256\,256x^{3}+13\,728x^{2}-288x+1.$$

$$T_{13}^{*}(x)=33\,554\,432x^{13}-218\,103\,808x^{12}+627\,048\,448x^{11}-$$
$$-1\,049\,624\,576x^{10}+1\,133\,117\,440x^{9}-825\,556\,992x^{8}+$$
$$+412\,778\,496x^{7}-141\,213\,696x^{6}+32\,361\,472x^{5}-$$
$$-4\,759\,040x^{4}+416\,416x^{3}-18\,928x^{2}+338x-1.$$

$$T_{14}^{*}(x)=134\,217\,728x^{14}-939\,524\,096x^{13}+2\,936\,012\,800x^{12}-$$
$$-5\,402\,263\,552x^{11}+6\,499\,598\,336x^{10}-5\,369\,233\,408x^{9}+$$
$$+3\,111\,714\,816x^{8}-1\,270\,087\,680x^{7}+361\,181\,184x^{6}-$$
$$-69\,701\,632x^{5}+8\,712\,704x^{4}-652\,288x^{3}+25\,480x^{2}-392x+1.$$

$$T_{15}^{*}(x)=536\,870\,912x^{15}-4\,026\,531\,840x^{14}+13\,589\,544\,960x^{13}-$$
$$-27\,262\,976\,000x^{12}+36\,175\,872\,000x^{11}-33\,426\,505\,728x^{10}+$$
$$+22\,052\,208\,640x^{9}-10\,478\,223\,360x^{8}+$$
$$+3\,572\,121\,600x^{7}-859\,955\,200x^{6}+141\,892\,608x^{5}-$$
$$-15\,275\,520x^{4}+990\,080x^{3}-33\,600x^{2}+450x-1.$$

$$T_{16}^{*}(x)=2\,147\,483\,648x^{16}-17\,179\,869\,184x^{15}+62\,277\,025\,792x^{14}-$$
$$-135\,291\,469\,824x^{13}+196\,293\,427\,200x^{12}-$$
$$-200\,655\,503\,360x^{11}+148\,562\,247\,680x^{10}-$$
$$-80\,648\,077\,312x^{9}+32\,133\,218\,304x^{8}-$$
$$-9\,313\,976\,320x^{7}+1\,926\,299\,648x^{6}-275\,185\,664x^{5}+$$
$$+25\,798\,656x^{4}-1\,462\,272x^{3}+43\,520x^{2}-512x+1.$$

$$T_{17}^{*}(x)=8\,589\,934\,592x^{17}-73\,014\,444\,032x^{16}+282\,930\,970\,624x^{15}-$$
$$-661\,693\,399\,040x^{14}+1\,042\,167\,103\,488x^{13}-$$
$$-1\,167\,945\,891\,840x^{12}+959\,384\,125\,440x^{11}-$$
$$-586\,290\,298\,880x^{10}+267\,776\,819\,200x^{9}-$$
$$-91\,044\,118\,528x^{8}+22\,761\,029\,632x^{7}-$$
$$-4\,093\,386\,752x^{6}+511\,673\,344x^{5}-42\,170\,880x^{4}+$$
$$+2\,108\,544x^{3}-55\,488x^{2}+578x-1.$$

$$T_{18}^{*}(x)=34\,359\,738\,368x^{18}-309\,237\,645\,312x^{17}+1\,275\,605\,286\,912x^{16}-$$
$$-3\,195\,455\,668\,224x^{15}+5\,429\,778\,186\,240x^{14}-$$
$$-6\,620\,826\,304\,512x^{13}+5\,977\,134\,858\,240x^{12}-$$
$$-4\,063\,273\,943\,040x^{11}+2\,095\,125\,626\,880x^{10}-$$
$$-819\,082\,035\,200x^{9}+240\,999\,137\,280x^{8}-$$
$$-52\,581\,629\,952x^{7}+8\,307\,167\,232x^{6}-916\,844\,544x^{5}+$$
$$+66\,977\,280x^{4}-2\,976\,768x^{3}+69\,768x^{2}-648x+1.$$

$$T^*_{19}(x) = 137\,438\,953\,472x^{19} - 1\,305\,670\,057\,984x^{18} + 5\,712\,306\,503\,680x^{17} - 15\,260\,018\,802\,688x^{16} + 27\,827\,093\,110\,784x^{15} - 36\,681\,168\,191\,488x^{14} + 36\,108\,024\,938\,496x^{13} - 27\,039\,419\,596\,800x^{12} + 15\,547\,666\,268\,060x^{11} - 6\,880\,289\,095\,680x^{10} + 2\,334\,383\,800\,320x^{9} - 601\,280\,675\,840x^{8} + 115\,630\,899\,200x^{7} - 16\,188\,325\,888x^{6} + 1\,589\,924\,864x^{5} - 103\,690\,752x^{4} + 4\,124\,064x^{3} - 86\,640x^{2} + 722x - 1.$$

$$T^*_{20}(x) = 549\,755\,813\,888x^{20} - 5\,497\,558\,138\,880x^{19} + 25\,426\,206\,392\,320x^{18} - 72\,155\,450\,572\,800x^{17} + 140\,552\,804\,761\,600x^{16} - 199\,183\,403\,319\,296x^{15} + 212\,364\,657\,950\,720x^{14} - 173\,752\,901\,959\,680x^{13} + 110\,292\,369\,408\,000x^{12} - 54\,553\,214\,976\,000x^{11} + 21\,002\,987\,765\,760x^{10} - 6\,254\,808\,268\,800x^{9} + 1\,424\,085\,811\,200x^{8} - 243\,433\,472\,000x^{7} + 30\,429\,184\,000x^{6} - 2\,677\,768\,192x^{5} + 156\,900\,480x^{4} - 5\,617\,920x^{3} + 106\,400x^{2} - 800x + 1.$$

5°. Многочлены $C_n(x)$.

$C_0(x) = 2.$
$C_1(x) = x.$
$C_2(x) = x^2 - 2.$
$C_3(x) = x^3 - 3x.$
$C_4(x) = x^4 - 4x^2 + 2.$
$C_5(x) = x^5 - 5x^3 + 5x.$
$C_6(x) = x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2.$
$C_7(x) = x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x.$
$C_8(x) = x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 2.$
$C_9(x) = x^9 - 9x^7 + 27x^5 - 30x^3 + 9x.$
$C_{10}(x) = x^{10} - 10x^8 + 35x^6 - 50x^4 + 25x^2 - 2.$
$C_{11}(x) = x^{11} - 11x^9 + 44x^7 - 77x^5 + 55x^3 - 11x.$
$C_{12}(x) = x^{12} - 12x^{10} + 54x^8 - 112x^6 + 105x^4 - 36x^2 + 2.$

6° Многочлены Чебышева второго рода $U_n(x)$.

$U_0(x) = 1.$
$U_1(x) = 2x.$
$U_2(x) = 4x^2 - 1.$
$U_3(x) = 8x^3 - 4x.$
$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1.$
$U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x.$
$U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1.$
$U_7(x) = 128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x.$
$U_8(x) = 256x^8 - 448x^6 + 240x^4 - 40x^2 + 1.$

$U_9(x) = 512x^9 - 1024x^7 + 672x^5 - 160x^3 + 10x.$

$U_{10}(x) = 1024x^{10} - 2304x^8 + 1792x^6 - 560x^4 + 60x^2 - 1.$

$U_{11}(x) = 2048x^{11} - 512x^9 + 4608x^7 - 1792x^5 + 280x^3 - 12x.$

$U_{12}(x) = 4096x^{12} - 11264x^{10} + 11520x^8 - 5376x^6 + 1120x^4 - 84x^2 + 1.$

7°. Смещенные многочлены Чебышева второго рода $U_n^*(x)$.

$U_0^*(x) = 1.$

$U_1^*(x) = 4x - 2.$

$U_2^*(x) = 16x^2 - 16x + 3.$

$U_3^*(x) = 64x^3 - 96x^2 + 40x - 4.$

$U_4^*(x) = 256x^4 - 512x^3 + 336x^2 - 80x + 5.$

$U_5^*(x) = 1024x^5 - 2560x^4 + 2304x^3 - 896x^2 + 140x - 6.$

$U_6^*(x) = 4096x^6 - 12\,288x^5 + 14\,080x^4 - 7680x^3 + 2016x^2 - 224x + 7.$

$$U_7^*(x) = 16\,384x^7 - 57\,344x^6 + 79\,872x^5 - 56\,320x^4 + 21\,120x^3 - 4032x^2 + 336x - 8.$$

$$U_8^*(x) = 65\,536x^8 - 262\,144x^7 + 430\,080x^6 - 372\,736x^5 + 183\,040x^4 - 50\,688x^3 + 7392x^2 - 480x + 9.$$

$$U_9^*(x) = 262\,144x^9 - 1\,179\,648x^8 + 2\,228\,224x^7 - 2\,293\,760x^6 + 1\,397\,760x^5 - 512\,512x^4 + 109\,824x^3 - 12\,672x^2 + 660x - 10.$$

$$U_{10}^*(x) = 1\,048\,576x^{10} - 5\,242\,880x^9 + 11\,206\,656x^8 - 13\,369\,344x^7 + 9\,748\,480x^6 - 4\,472\,832x^5 + 1\,281\,280x^4 - 219\,648x^3 + 20\,592x^2 - 880x + 11.$$

$$U_{11}^*(x) = 4\,194\,304x^{11} - 23\,068\,672x^{10} + 55\,050\,240x^9 - 74\,711\,040x^8 + 63\,504\,384x^7 - 35\,094\,528x^6 + 12\,673\,024x^5 - 2\,928\,640x^4 + 411\,840x^3 - 32\,032x^2 + 1144x - 12.$$

$$U_{12}^*(x) = 16\,777\,216x^{12} - 100\,663\,296x^{11} + 265\,289\,728x^{10} - 403\,701\,760x^9 + 392\,232\,960x^8 - 254\,017\,536x^7 + 111\,132\,672x^6 - 32\,587\,776x^5 + 6\,223\,360x^4 - 732\,160x^3 + 48\,048x^2 - 1456x + 13.$$

$$U_{13}^*(x) = 67\,108\,864x^{13} - 436\,207\,616x^{12} - 1\,258\,291\,200x^{11} - 2\,122\,317\,824x^{10} + 2\,321\,285\,120x^9 - 1\,725\,825\,024x^8 + 889\,061\,376x^7 - 317\,521\,920x^6 + 77\,395\,968x^5 - 12\,446\,720x^4 - 1\,244\,672x^3 + 69\,888x^2 - 1820x + 14.$$

8°. Многочлены $S_n(x)$.

$S_0(x)=1.$
$S_1(x)=x.$
$S_2(x)=x^2-1.$
$S_3(x)=x^3-2x.$
$S_4(x)=x^4-3x^2+1.$
$S_5(x)=x^5-4x^3+3x.$
$S_6(x)=x^6-5x^4+6x^2-1.$
$S_7(x)=x^7-6x^5+10x^3-4x.$
$S_8(x)=x^8-7x^6+15x^4-10x^2+1.$
$S_9(x)=x^9-8x^7+21x^5-20x^3+5x.$
$S_{10}(x)=x^{10}-9x^8+28x^6-35x^4+15x^2-1.$
$S_{11}(x)=x^{11}-10x^9+36x^7-56x^5+35x^3-6x.$
$S_{12}(x)=x^{12}-11x^{10}+45x^8-84x^6+70x^4-21x^2+1.$

9°. Многочлены Лагерра $L_n(x)$.

$L_0(x)=1.$
$L_1(x)=-x+1.$
$L_2(x)=x^2-4x+2.$
$L_3(x)=-x^3+9x^2-18x+6.$
$L_4(x)=x^4-16x^3+72x^2-96x+24.$
$L_5(x)=-x^5+25x^4-200x^3+600x^2-600x+120.$
$L_6(x)=x^6-36x^5+450x^4-2400x^3+5400x^2-4320x+720.$

$$L_7(x)=-x^7+49x^6-882x^5+7350x^4-29\,400x^3+52\,920x^2-35\,280x+5040.$$

$$L_8(x)=x^8-64x^7+1568x^6-18\,816x^5+117\,600x^4-376\,320x^3+564\,480x^2-322\,560x+40\,320.$$

$$L_9(x)=-x^9+81x^8-2592x^7+42\,336x^6-381\,024x^5+1\,905\,120x^4-5\,080\,320x^3+6\,531\,840x^2-3\,265\,920x+362\,880.$$

$$L_{10}(x)=x^{10}-100x^9+4050x^8-86\,400x^7+1\,058\,400x^6-7\,620\,480x^5+31\,752\,000x^4-72\,576\,000x^3+81\,648\,000x^2-36\,288\,000x+3\,628\,800.$$

$$L_{11}(x)=-x^{11}+121x^{10}-6050x^9+163\,350x^8-2\,613\,600x^7+25\,613\,280x^6-153\,679\,680x^5+548\,856\,000x^4-1\,097\,712\,000x^3+1\,097\,712\,000x^2-439\,084\,800x+39\,916\,800.$$

10°. Многочлены Эрмита $H_n(x)$.

$H_1(x)=2x.$
$H_2(x)=4x^2-2.$
$H_3(x)=8x^3-12x.$
$H_4(x)=16x^4-48x^2+12.$
$H_5(x)=32x^5-160x^3+120x.$
$H_6(x)=64x^6-480x^4+720x^2-120.$
$H_7(x)=128x^7-1344x^5+3360x^3-1680x.$
$H_8(x)=256x^8-3584x^6+13\,440x^4-13\,440x^2+1680.$
$H_9(x)=512x^9-9216x^7+48\,384x^5-80\,640x^3+30\,240x.$
$H_{10}(x)=1024x^{10}-23\,040x^8+161\,280x^6-403\,200x^4+302\,400x^2-30\,240.$

6. Нули многочленов. 1°. Нули многочленов Чебышева. Нули многочленов Чебышева первого рода $T_n(x)$, как это вытекает непосредственно из определения, получаются из формулы

$$x_k^{(n)} = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi \qquad (k=1,\ 2,\ \qquad n).$$

Нули многочленов Чебышева второго рода $U_n(x)$ аналогичным образом находятся по формуле

$$x_k^{(n)} = \cos\frac{k}{n+1}\pi \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

2°. Нули многочленов Лежандра $P_n(x)$.

$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
0,000000	0,577350	0,000000 0,774597	0,339981 0,861136	0,000000 0,538469 0,906180
$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
0,238619 0,661209 0,932470	0,000000 0,405845 0,741531 0,949108	0,183435 0,525533 0,796666 0,960290	0,000000 0,324253 0,613371 0,836031 0,968160	0,148874 0,433395 0,679410 0,865063 0,973907
$n=11$	$n=12$	$n=13$	$n=14$	$n=15$
0,000000 0,269543 0,519095 0,730152 0,887063 0,978229	0,125233 0,367832 0,587318 0,769903 0,904117 0,981561	0,000000 0,230458 0,448493 0,642349 0,801578 0,917598 0,984183	0,108055 0,319112 0,515249 0,697293 0,827202 0,928435 0,986284	0,000000 0,201194 0,394151 0,570972 0,724418 0,848207 0,937273 0,987993

$n = 16$	$n = 17$	$n = 18$	$n = 19$	$n = 20$
0,095012	0,000000	0,084775	0,000000	0,076527
0,281605	0,178484	0,251886	0,160359	0,227786
0,458017	0,351232	0,411751	0,316564	0,373706
0,617876	0,512691	0,559771	0,464571	0,510867
0,755404	0,657671	0,691687	0,600545	0,636054
0,865631	0,781514	0,803705	0,720966	0,746332
0,944575	0,880239	0,892603	0,822715	0,839117
0,989401	0,950676	0,955824	0,903156	0,912235
	0,990575	0,991565	0,960208	0,963972
			0,992407	0,993129
$n = 21$	$n = 22$	$n = 23$	$n = 24$	$n = 25$
0,000000	0,069739	0,000000	0,064057	0,000000
0,145562	0,207860	0,133257	0,191119	0,122865
0,288021	0,341936	0,264136	0,315043	0,243867
0,424342	0,469356	0,390301	0,433794	0,361172
0,551619	0,587640	0,509502	0,545421	0,473003
0,667139	0,694487	0,619610	0,648094	0,577663
0,768440	0,787817	0,718661	0,740124	0,673566
0,853363	0,865812	0,804888	0,820002	0,759259
0,920100	0,926957	0,876752	0,886415	0,833443
0,967227	0,970061	0,932971	0,938275	0,894992
0,993752	0,994295	0,972542	0,974729	0,942975
		0,994769	0,995187	0,976664
				0,995557
$n = 26$	$n = 27$	$n = 28$	$n = 29$	$n = 30$
0,059230	0,000000	0,055079	0,000000	0,051472
0,176859	0,113973	0,164569	0,106278	0,153870
0,292005	0,226459	0,272062	0,211352	0,254637
0,403052	0,335994	0,376252	0,314032	0,352705
0,508441	0,441148	0,475874	0,413153	0,447034
0,606692	0,540552	0,569720	0,507593	0,536624
0,696427	0,632908	0,656651	0,596282	0,620526
0,776386	0,717013	0,735611	0,678215	0,697850
0,845446	0,791772	0,805641	0,752463	0,767777
0,902638	0,856208	0,865892	0,818185	0,829566
0,947159	0,909482	0,915633	0,874638	0,882560
0,978385	0,950901	0,954259	0,921180	0,926200
0,995886	0,979923	0,981303	0,957286	0,960022
	0,996179	0,996442	0,982545	0,983668
			0,996679	0,996893

$n=31$	$n=32$	$n=33$	$n=34$	$n=35$
0,000000	0,048308	0,000000	0,045510	0,000000
0,099555	0,144472	0,093631	0,136152	0,088371
0,198121	0,239287	0,186439	0,225667	0,176051
0,294718	0,331869	0,277609	0,313311	0,262353
0,388386	0,421351	0,366339	0,398359	0,346602
0,478194	0,506900	0,451850	0,480106	0,428138
0,563249	0,587716	0,533390	0,557876	0,506323
0,642707	0,663044	0,610242	0,631022	0,580545
0,715777	0,732182	0,681732	0,698939	0,650224
0,781733	0,794484	0,747231	0,761065	0,714814
0,839920	0,849368	0,806162	0,816884	0,773810
0,889760	0,896321	0,858010	0,865935	0,826750
0,930757	0,934906	0,902317	0,907810	0,873219
0,962504	0,964762	0,938694	0,942162	0,912854
0,984686	0,985612	0,966823	0,968708	0,945345
0,997087	0,997264	0,986456	0,987228	0,970438
		0,997425	0,997572	0,987936
				0,997707

$n=36$	$n=37$	$n=38$	$n=39$	$n=40$
0,043018	0,000000	0,040785	0,000000	0,038772
0,128736	0,083670	0,122084	0,079444	0,116084
0,213501	0,166754	0,202570	0,158385	0,192698
0,296685	0,248668	0,281709	0,236326	0,268152
0,377673	0,328837	0,358972	0,312772	0,341994
0,455864	0,406701	0,433848	0,387240	0,413779
0,530680	0,481711	0,505835	0,459261	0,483076
0,601568	0,553341	0,574456	0,528377	0,549467
0,668001	0,621093	0,639255	0,594153	0,612554
0,729489	0,684486	0,699799	0,656173	0,671957
0,785576	0,743079	0,755686	0,714044	0,727318
0,835847	0,796459	0,806544	0,767401	0,778306
0,879930	0,844253	0,852035	0,815906	0,824612
0,917498	0,886125	0,891856	0,859253	0,865960
0,948273	0,921781	0,925741	0,897167	0,902099
0,972028	0,950972	0,953466	0,929409	0,932813
0,988586	0,973493	0,974846	0,955775	0,957917
0,997830	0,989186	0,989739	0,976099	0,977260
	0,997945	0,998050	0,990252	0,990726
			0,998147	0,998238

3°. Нули многочленов Лагерра $L_n(x)$.

$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
1,000000	0,585786	0,415775	0,322548	0,263560
	3,414214	2,294280	1,745761	1,413403
		6,289945	4,536620	3,596426
			9,395071	7,085810
				12,640801

$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
0,222847	0,193044	0,170280	0,152322	0,137793
1,188932	1,026665	0,903702	0,807220	0,729455
2,992736	2,567877	2,251087	2,005135	1,808343
5,775144	4,900353	4,266700	3,783474	3,401434
9,837467	8,182153	7,045905	6,204957	5,552496
15,982874	12,734180	10,758516	9,372985	8,330153
	19,395728	15,740679	13,466237	11,843786
		22,863132	18,833598	16,279258
			26,374072	21,996586
				29,920697

$n=11$	$n=12$	$n=13$	$n=14$	$n=15$
0,125796	0,115722	0,107142	0,099748	0,093308
0,665418	0,611757	0,566132	0,526858	0,492692
1,647151	1,512610	1,398564	1,300629	1,215595
3,091138	2,833751	2,616597	2,430801	2,269950
5,029284	4,599228	4,238846	3,932103	3,667623
7,509888	6,844525	6,292256	5,825536	5,425337
10,605951	9,621317	8,815002	8,140240	7,565916
14,431614	13,006055	11,861404	10,916500	10,120229
19,178857	17,116855	15,510762	14,210805	13,130282
25,217709	22,151090	19,884636	18,104892	16,654408
33,497193	28,487967	25,182564	22,723382	20,776479
	37,099121	31,800386	28,272982	25,623894
		40,723009	35,149444	31,407519
			44,366082	38,530683
				48,026086

4°. Нули многочленов Эрмита $H_n(x)$.

$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
0,000000	0,707107	0,000000 1,224745	0,524648 1,650680	0,000000 0,958572 2,020183
$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
0,436077 1,335849 2,350605	0,000000 0,816288 1,673552 2,651961	0,381187 1,157194 1,981657 2,930637	0,000000 0,723551 1,468553 2,266581 3,190993	0,322901 1,036611 1,756684 2,532732 3,436159
$n=11$	$n=12$	$n=13$	$n=14$	$n=15$
0,000000 0,656810 1,326557 2,025948 2,783290 3,668471	0,314240 0,947788 1,597683 2,279507 3,020637 3,889725	0,000000 0,605764 1,220055 1,853108 2,519736 3,246609 4,101338	0,291746 0,878714 1,476683 2,095183 2,748471 3,462657 4,304449	0,000000 0,565070 1,136116 1,719993 2,325732 2,967167 3,669950 4,499991
$n=16$	$n=17$	$n=18$	$n=19$	$n=20$
0,273481 0,822951 1,380259 1,951788 2,546202 3,176999 3,869448 4,688739	0,000000 0,531633 1,067649 1,612924 2,173503 2,757763 3,378932 4,061947 4,871345	0,258268 0,776683 1,300921 1,835532 2,386299 2,961378 3,573769 4,248118 5,048364	0,000000 0,503520 1,010368 1,524171 2,049232 2,591134 3,157849 3,762187 4,428533 5,220272	0,245341 0,737474 1,234076 1,738538 2,254974 2,788806 3,347855 3,944764 4,603682 5,387481

5°. Нули многочленов Эрмита $h_n(x)$.

$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
0,000000	1,000000	0,000000	0,741964	0,000000	0,616707
		1,732051	2,334414	1,355626	1,889176
				2,856970	3,324257

$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$	$n=11$	$n=12$
0,00000	0,539080	0,000000	0,484936	0,000000	0,444403
1,154405	1,636519	1,023256	1,465989	0,928869	1,340375
2,366759	2,802486	2,076848	2,484326	1,876035	2,259464
3,750440	4,144547	3,205429	3,581823	2,865123	3,223710
		4,512746	4,839463	3,936166	4,271826
				5,188001	5,500902

$n=13$	$n=14$	$n=15$	$n=16$	$n=17$
0,000000	0,412590	0,000000	0,386761	0,000000
0,856680	1,242689	0,799129	1,163829	0,751843
1,725418	2,088345	1,606710	1,951980	1,509883
2,620690	2,963037	2,432437	2,760245	2,281020
3,563444	3,886925	3,289082	3,600874	3,073797
4,591398	4,896936	4,196208	4,492955	3,900066
5,800167	6,087409	5,190094	5,472226	4,778532
		6,363948	6,630878	5,744460
				6,889122

$n=18$	$n=19$	$n=20$	$n=21$	$n=22$
0,365246	0,000000	0,346964	0,000000	0,331179
1,098395	0,712085	1,042945	0,678046	0,995162
1,839780	1,428877	1,745246	1,359765	1,664125
2,595834	2,155503	2,458664	2,049102	2,341760
3,374737	2,898051	3,189015	2,750593	3,032404
4,188020	3,664417	3,943967	3,469847	3,741496
5,054073	4,465873	4,734581	4,214344	4,476362
6,007746	5,320536	5,578739	4,994964	5,247725
7,139465	6,262891	6,510590	5,829382	6,073075
	7,382579	7,619049	6,751445	6,985981
			7,849383	8,074030

II. ЧИСЛОВЫЕ ТАБЛИЦЫ

Таблица 1. Коэффициенты некоторых рядов

n	$\frac{1}{n}$		$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$	
1	$\frac{1}{1}$	1,00000	$\frac{1}{1}$	1,00000
2	$\frac{1}{2}$	0,50000	$1+\frac{1}{2}$	1,50000
3	$\frac{1}{3}$	0,33333	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$	1,83333
4	$\frac{1}{4}$	0,25000	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$	2,08333
5	$\frac{1}{5}$	0,20000	$1+\frac{1}{2}+ \quad +\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$	2,28333
6	$\frac{1}{6}$	0,16667	$1+\frac{1}{2}+ \quad +\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$	2,45000
7	$\frac{1}{7}$	0,14286	$1+\frac{1}{2}+ \quad +\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$	2,59286
8	$\frac{1}{8}$	0,12500	$1+\frac{1}{2}+ \quad +\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$	2,71786
9	$\frac{1}{9}$	0,11111	$1+\frac{1}{2}+ \quad +\frac{1}{8}+\frac{1}{9}$	2,82897
10	$\frac{1}{10}$	0,10000	$1+\frac{1}{2}+ \quad +\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$	2,92897

Продолжение табл. 1

n	$n!$		$\frac{1}{n!}$	
1	1	1	$\frac{1}{1}$	1,000 00
2	$1\cdot 2$	2	$\frac{1}{1\cdot 2}$	0,500 00
3	$1\cdot 2\cdot 3$	6	$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$	0,166 67
4	$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$	24	$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$	0,041 667
5	$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$	120	$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$	0,008 333 3
6	$1\cdot 2\ldots 5\cdot 6$	720	$\frac{1}{1\cdot 2\ldots 5\cdot 6}$	0,001 388 9
7	$1\cdot 2\ldots 6\cdot 7$	5 040	$\frac{1}{1\cdot 2\ldots 6\cdot 7}$	0,000 198 41
8	$1\cdot 2\ldots 7\cdot 8$	40 320	$\frac{1}{1\cdot 2\ldots 7\cdot 8}$	0,000 024 802
9	$1\cdot 2\ldots 8\cdot 9$	362 880	$\frac{1}{1\cdot 2\ldots 8\cdot 9}$	0,000 002 755 7
10	$1\cdot 2\ldots 9\cdot 10$	3 628 800	$\frac{1}{1\cdot 2\ldots 9\cdot 10}$	0,000 000 275 57

Продолжение табл. 1

n	$(2n-1)!!$		$\frac{1}{(2n-1)!!}$	
1	1	1	$\frac{1}{2}$	1,000 00
2	$1\cdot3$	3	$\frac{1}{1\cdot3}$	0,333 33
3	$1\cdot3\cdot5$	15	$\frac{1}{1\cdot3\cdot5}$	0,066 667
4	$1\cdot3\cdot5\cdot7$	105	$\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot7}$	1,009 523 9
5	$1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9$	945	$\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}$	0,001 058 2
6	$1\cdot3\ldots9\cdot11$	10 395	$\frac{1}{1\cdot3\ldots9\cdot11}$	0,000 096 2
7	$1\cdot3\ldots11\cdot13$	135 135	$\frac{1}{1\cdot3\ldots11\cdot13}$	0,000 007 4
8	$1\cdot3\ldots13\cdot15$	2 027 025	$\frac{1}{1\cdot3\ldots13\cdot15}$	0,000 000 493
9	$1\cdot3\ldots15\cdot17$	34 459 425	$\frac{1}{1\cdot3\ldots15\cdot17}$	0,000 000 029
10	$1\cdot3\ldots17\cdot19$	654 729 075	$\frac{1}{1\cdot3\ldots17\cdot19}$	0,000 000 002

Продолжение табл. 1

n	$(2n)!!$		$\frac{1}{(2n)!!}$	
1	2	2	$\frac{1}{2}$	0,500 00
2	$2\cdot 4$	8	$\frac{1}{2\cdot 4}$	0,125 00
3	$2\cdot 4\cdot 6$	48	$\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}$	0,020 833
4	$2\cdot 4\cdot 6\cdot 8$	384	$\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}$	0,002 604 2
5	$2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10$	3 840	$\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}$	0,000 260 42
6	$2\cdot 4\ldots 10\cdot 12$	46 080	$\frac{1}{2\cdot 4\ldots 10\cdot 12}$	0,000 021 701
7	$2\cdot 4\ldots 12\cdot 14$	645 120	$\frac{1}{2\cdot 4\ldots 12\cdot 14}$	0,000 001 550
8	$2\cdot 4\ldots 14\cdot 16$	10 321 920	$\frac{1}{2\cdot 4\ldots 14\cdot 16}$	0,000 000 097
9	$2\cdot 4\ldots 16\cdot 18$	185 794 560	$\frac{1}{2\cdot 4\ldots 16\cdot 18}$	0,000 000 005
10	$2\cdot 4\ldots 18\cdot 20$	3 715 891 200	$\frac{1}{2\cdot 4\ldots 18\cdot 20}$	0,000 000 000

Продолжение табл. 1

n	$\frac{n!}{(2n-1)!!}$		$\frac{2^n n!}{(2n+1)!!}$	
1	$\frac{1}{1}$	1,00000	$\frac{2}{1\cdot 3}$	0,66667
2	$\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}$	0,66667	$\frac{2\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5}$	0,53333
3	$\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}$	0,40000	$\frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}$	0,45714
4	$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}$	0,22857	$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}$	0,40635
5	$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}$	0,12698	$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}$	0,36941
6	$\frac{1\cdot 2\ldots 5\cdot 6}{1\cdot 3\ldots 9\cdot 11}$	0,06926	$\frac{2\cdot 4\ldots 10\cdot 12}{1\cdot 3\ldots 11\cdot 13}$	0,34099
7	$\frac{1\cdot 2\ldots 6\cdot 7}{1\cdot 3\ldots 11\cdot 13}$	0,03730	$\frac{2\cdot 4\ldots 12\cdot 14}{1\cdot 3\ldots 13\cdot 15}$	0,31826
8	$\frac{1\cdot 2\ldots 7\cdot 8}{1\cdot 3\ldots 13\cdot 15}$	0,01989	$\frac{2\cdot 4\ldots 14\cdot 16}{1\cdot 3\ldots 15\cdot 17}$	0,29954
9	$\frac{1\cdot 2\ldots 8\cdot 9}{1\cdot 3\ldots 15\cdot 17}$	0,01053	$\frac{2\cdot 4\ldots 16\cdot 18}{1\cdot 3\ldots 17\cdot 19}$	0,28377
10	$\frac{1\cdot 2\ldots 9\cdot 10}{1\cdot 3\ldots 17\cdot 19}$	0,00554	$\frac{2\cdot 4\ldots 18\cdot 20}{1\cdot 3\ldots 19\cdot 21}$	0,27026

Продолжение табл. 1

n	$\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}$		$\frac{(2n-1)!!}{2^n n!\,(2n+1)}$	
1	$\frac{1}{2}$	0,50000	$\frac{1}{2\cdot 3}$	0,166 667
2	$\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}$	0,37500	$\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}$	0,075 000
3	$\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}$	0,31250	$\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}$	0,044 643
4	$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}$	0,27344	$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9}$	0,030 382
5	$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}$	0,24609	$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 10\cdot 11}$	0,022 372
6	$\frac{1\cdot 3\ldots 9\cdot 11}{2\cdot 4\ldots 10\cdot 12}$	0,22559	$\frac{1\cdot 3\ldots 9\cdot 11}{2\cdot 4\ldots 12\cdot 13}$	0,017 353
7	$\frac{1\cdot 3\ldots 11\cdot 13}{2\cdot 4\ldots 12\cdot 14}$	0,20947	$\frac{1\cdot 3\ldots 11\cdot 13}{2\cdot 4\ldots 14\cdot 15}$	0,013 965
8	$\frac{1\cdot 3\ldots 13\cdot 15}{2\cdot 4\ldots 14\cdot 16}$	0,19638	$\frac{1\cdot 3\ldots 13\cdot 15}{2\cdot 4\ldots 16\cdot 17}$	0,011 552
9	$\frac{1\cdot 3\ldots 15\cdot 17}{2\cdot 4\ldots 16\cdot 18}$	0,18547	$\frac{1\cdot 3\ldots 15\cdot 17}{2\cdot 4\ldots 18\cdot 19}$	0,009 761 6
10	$\frac{1\cdot 3\ldots 17\cdot 19}{2\cdot 4\ldots 18\cdot 20}$	0,17620	$\frac{1\cdot 3\ldots 17\cdot 19}{2\cdot 4\ldots 20\cdot 21}$	0,008 390 3

Продолжение табл. 1

n	$\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}$		$\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!(2n+3)}$	
1	$\frac{1}{2\cdot 4}$	0,125 00	$\frac{1}{2\cdot 4\cdot 5}$	0,025 000
2	$\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}$	0,062 500	$\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}$	0,008 928 6
3	$\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}$	0,039 062	$\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9}$	0,004 340 3
4	$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}$	0,027 344	$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\ldots 10\cdot 11}$	0,002 485 8
5	$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\ldots 10\cdot 12}$	0,020 508	$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\ldots 12\cdot 13}$	0,001 577 5
6	$\frac{1\cdot 3\ldots 9\cdot 11}{2\cdot 4\ldots 12\cdot 14}$	0,016 113	$\frac{1\cdot 3\ldots 9\cdot 11}{2\cdot 4\ldots 14\cdot 15}$	0,001 074 2
7	$\frac{1\cdot 3\ldots 11\cdot 13}{2\cdot 4\ldots 14\cdot 16}$	0,013 092	$\frac{1\cdot 3\ldots 11\cdot 13}{2\cdot 4\ldots 16\cdot 17}$	0,000 770 12
8	$\frac{1\cdot 3\ldots 13\cdot 15}{2\cdot 4\ldots 16\cdot 18}$	0,010 910	$\frac{1\cdot 3\ldots 13\cdot 15}{2\cdot 4\ldots 18\cdot 19}$	0,000 574 21
9	$\frac{1\cdot 3\ldots 15\cdot 17}{2\cdot 4\ldots 18\cdot 20}$	0,009 273 5	$\frac{1\cdot 3\ldots 15\cdot 17}{2\cdot 4\ldots 20\cdot 21}$	0,000 441 60
10	$\frac{1\cdot 3\ldots 17\cdot 19}{2\cdot 4\ldots 20\cdot 22}$	0,008 009 0	$\frac{1\cdot 3\ldots 17\cdot 19}{2\cdot 4\ldots 22\cdot 23}$	0,000 348 22

Таблица 2. Биномиальные коэффициенты $\binom{n}{m}$

m \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2			3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171
3					10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560	680	816	969
4							35	70	126	210	330	495	715	1001	1365	1 820	2 380	3 060	3 876
5									126	252	462	792	1287	2002	3003	4 368	6 188	8 568	11 628
6											462	924	1716	3003	5005	8 008	12 376	18 564	27 132
7													1716	3432	6435	11 440	19 448	31 824	50 388
8															6435	12 870	24 310	43 758	75 582
9																	24 310	48 620	92 378
10																			92 378

Примечание. В таблице приводятся коэффициенты только первой половины членов бинома Ньютона, остальные (симметричные) коэффициенты определяются по формуле $C_n^m = C_n^{n-m}$; $C_n^0 = 1$; множитель 10^k указывает, что число приближенное.

Продолжение табл. 2

m \ n	20	21	22	23	24	25	26	27	28
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	20	21	22	23	24	25	26	27	28
2	190	210	231	253	276	300	325	351	378
3	1 140	1 330	1 540	1 771	2 024	2 300	2 600	2 925	3 276
4	4 845	5 985	7 315	8 855	10 626	12 650	14 950	17 550	20 475
5	15 504	20 349	26 334	33 649	42 504	53 130	65 780	80 730	98 280
6	38 760	54 264	74 613	100 947	134 596	177 100	230 230	296 010	376 740
7	77 520	116 280	170 544	245 157	346 104	480 700	657 800	888 030	1 184 040
8	125 970	203 490	319 770	490 314	735 471	1 081 575	1 562 275	2 220 075	3 108 105
9	167 960	293 930	497 420	817 190	1 307 504	2 042 975	3 124 550	4 686 825	6 906 900
10	184 756	352 716	646 646	1 144 066	1 961 256	3 268 760	5 311 735	8 436 285	13 123 110
11		352 716	705 432	1 352 078	2 496 144	4 457 400	7 726 160	13 037 895	21 474 180
12				1 352 078	2 704 156	5 200 300	9 657 700	17 383 860	30 421 755
13						5 200 300	10 400 600	20 058 300	37 442 160
14								20 058 300	40 116 600

Продолжение табл. 2

m \ n	29	30	31	32	33	34	35
0	1	1	1	1	1	1	1
1	29	30	31	32	33	34	35
2	406	435	465	496	528	561	595
3	3 654	4 060	4 495	4 960	5 456	5 984	6 545
4	23 751	27 405	31 465	35 960	40 920	46 376	52 360
5	118 755	142 506	169 911	201 376	237 336	278 256	324 632
6	475 020	593 775	736 281	906 192	1 107 568	1 345 904	1 623 160
7	1 560 780	2 035 800	2 629 575	3 365 856	4 272 048	5 379 616	6 724 520
8	4 292 145	5 852 925	7 888 725	10 518 300	13 884 156	18 156 204	23 535 820
9	10 015 005	14 307 150	20 160 075	28 048 800	38 567 100	52 451 256	70 607 460
10	20 030 010	30 045 015	44 352 165	64 512 240	92 561 040	13 112 814·10	18 357 940·10
11	34 597 290	54 627 300	84 672 315	12 902 448·10	19 353 672·10	28 609 776	41 722 590
12	51 895 935	86 493 225	14 112 053·10	22 579 284	35 481 732	54 835 404	83 445 180
13	67 863 915	11 975 985·10	20 625 308	34 737 360	57 316 644	92 798 376	14 763 378·10²
14	77 558 760	14 542 268	26 518 253	47 143 560	81 880 920	13 919 756·10²	23 199 594
15	77 558 760	15 511 752	30 054 020	56 572 272	10 371 583·10²	18 559 675	32 479 432
16			30 054 020	60 108 039	11 668 031	22 039 644	40 599 290
17					11 668 031	23 336 062	45 375 677
18							45 375 677

Продолжение табл. 2

m \ n	36	37	38	39	40
0	1	1	1	1	1
1	36	37	38	39	40
2	630	666	703	741	780
3	7 140	7 770	8 436	9 139	9 880
4	58 905	66 045	73 815	82 251	91 390
5	376 992	435 897	501 942	575 757	658 008
6	1 947 792	2 324 784	2 760 681	3 262 623	3 838 380
7	8 347 680	10 295 472	12 620 256	15 380 937	18 643 560
8	30 260 340	38 608 020	48 903 492	61 523 748	76 904 685
9	94 143 280	12 440 362·10	16 301 164·10	21 191 513·10	27 343 888·10
10	25 418 686·10	34 833 014	47 273 376	63 574 540	84 766 053
11	60 080 530	85 499 215	12 033 223·10^2	16 760 560·10^2	23 118 014·10^2
12	12 516 777·10^2	18 524 830·10^2	27 074 751	39 107 974	55 868 535
13	23 107 896	35 624 673	54 149 503	81 224 254	12 033 223·10^3
14	37 962 972	61 070 868	96 695 541	15 084 504·10^3	23 206 930
15	55 679 026	93 641 998	15 471 287·10^3	25 140 841	40 225 345
16	73 078 721	12 875 775·10^3	22 239 974	37 711 261	62 852 102
17	85 974 966	15 905 369	28 781 143	51 021 118	88 732 379
18	90 751 353	17 672 632	33 578 001	62 359 144	11 338 026·10^4
19		17 672 632	35 345 264	68 923 264	13 128 241
20				68 923 264	13 784 653

Продолжение табл. 2

m \ n	41	42	43	44	45
0	1	1	1	1	1
1	41	42	43	44	45
2	820	861	903	946	990
3	10 660	11 480	12 341	13 244	14 190
4	101 270	111 930	123 410	135 751	148 995
5	749 398	850 668	962 598	1 086 008	1 221 759
6	4 496 388	5 245 786	6 096 454	7 059 052	8 145 060
7	22 481 940	26 978 328	32 224 114	38 320 568	45 379 620
8	95 548 245	11 803 019·10	14 500 851·10	17 723 263·10	21 555 320·10
9	35 034 357·10	44 589 181	56 392 200	70 893 051	88 616 314
10	11 210 994·10^2	14 714 430·10^2	19 173 348·10^2	24 812 568·10^2	31 901 873·10^2
11	31 594 620	42 805 614	57 520 043	76 693 391	10 150 596·10^3
12	78 986 549	11 058 117·10^3	15 338 678·10^3	21 090 683·10^3	28 760 022
13	17 620 076·10^3	25 518 731	36 576 848	51 915 526	73 006 209
14	35 240 153	52 860 229	78 378 960	11 495 581·10^4	16 687 133·10^4
15	63 432 275	98 672 428	15 153 266·10^4	22 991 162	34 486 743
16	10 307 745·10^4	16 650 972·10^4	26 518 215	41 671 481	64 662 642
17	15 158 448	25 466 193	42 117 165	68 635 380	11 030 686·10^5
18	20 211 264	35 369 712	60 835 905	10 295 307	17 158 845
19	24 466 267	44 677 531	80 047 243	14 088 315	24 383 622
20	26 912 894	51 379 161	96 056 692	17 610 394	31 698 708
21	26 912 894	53 825 787	10 520 495·10^5	20 126 164	37 736 558
22			10 520 495	21 040 990	41 167 154
23					41 167 154

Продолжение табл. 2

m \ n	46	47	48	49	50
0	1	1	1	1	1
1	46	47	48	49	50
2	1 035	1 081	1 128	1 176	1 225
3	15 180	16 215	17 296	18 424	19 600
4	163 185	178 365	194 580	211 876	230 300
5	1 370 754	1 533 939	1 712 304	1 906 884	2 118 760
6	9 366 819	10 737 573	12 271 512	13 983 816	15 890 700
7	53 524 680	62 891 499	73 629 072	85 900 584	99 884 400
8	$26\,093\,282 \cdot 10$	$31\,445\,750 \cdot 10$	$37\,734\,899 \cdot 10$	$45\,097\,807 \cdot 10$	$53\,687\,865 \cdot 10$
9	$11\,017\,163 \cdot 10^2$	$13\,626\,491 \cdot 10^2$	$16\,771\,066 \cdot 10^2$	$20\,544\,556 \cdot 10^2$	$25\,054\,337 \cdot 10^2$
10	40 763 504	51 780 668	65 407 159	82 178 225	$10\,272\,278 \cdot 10^3$
11	$13\,340\,783 \cdot 10^3$	$17\,417\,134 \cdot 10^3$	$22\,595\,200 \cdot 10^3$	$29\,135\,916 \cdot 10^3$	37 353 739
12	38 910 618	52 251 401	69 668 534	92 263 735	$12\,139\,965 \cdot 10^4$
13	$10\,176\,623 \cdot 10^4$	$14\,067\,685 \cdot 10^4$	$19\,292\,825 \cdot 10^4$	$26\,259\,678 \cdot 10^4$	35 486 052
14	23 987 754	34 164 377	48 232 062	67 524 887	93 784 566
15	51 173 876	75 161 630	$10\,932\,601 \cdot 10^5$	$15\,755\,807 \cdot 10^5$	$22\,508\,296 \cdot 10^5$
16	99 149 385	$15\,032\,326 \cdot 10^5$	22 548 489	33 481 090	49 236 897
17	$17\,496\,950 \cdot 10^5$	27 411 889	42 444 215	64 992 704	98 473 794
18	28 189 531	45 686 481	73 098 370	$11\,554\,258 \cdot 10^6$	$18\,053\,529 \cdot 10^6$
19	41 542 467	69 731 998	$11\,541\,848 \cdot 10^6$	18 851 685	30 405 943
20	56 082 330	97 624 797	16 735 679	28 277 527	47 129 212
21	69 435 266	$12\,551\,760 \cdot 10^6$	22 314 239	39 049 919	67 327 446
22	78 903 711	14 833 898	27 385 657	49 699 897	88 749 815
23	82 334 307	16 123 802	30 957 700	58 343 357	$10\,804\,325 \cdot 10^7$
24		16 123 802	32 247 604	63 205 303	12 154 866
25				63 205 303	12 641 061

Таблица 3. **Биномиальные коэффициенты $\binom{\nu}{m}$ (ν—число отрицательное или дробное)**

$\nu \backslash m$	1	2	3	4	5	6
—1	—1	+1	—1	+1	—1	+1
—2	—2	+3	—4	+5	—6	+7
—3	—3	+6	—10	+15	—21	+28
—4	—4	+10	—20	+35	—56	+84
—5	—5	+15	—35	+70	—126	+210
$-\frac{7}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$+\frac{63}{8}$	$-\frac{231}{16}$	$+\frac{3003}{128}$	$-\frac{9009}{256}$	$+\frac{51\,051}{1\,024}$
$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$+\frac{35}{8}$	$-\frac{105}{16}$	$+\frac{1155}{128}$	$-\frac{3003}{256}$	$+\frac{15\,015}{1\,024}$
$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$+\frac{15}{8}$	$-\frac{35}{16}$	$+\frac{315}{128}$	$-\frac{693}{256}$	$+\frac{3003}{1024}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{16}$	$+\frac{35}{128}$	$-\frac{63}{256}$	$+\frac{231}{1024}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{16}$	$-\frac{5}{128}$	$+\frac{7}{256}$	$-\frac{21}{1024}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{16}$	$+\frac{3}{128}$	$-\frac{3}{256}$	$+\frac{7}{1024}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$+\frac{15}{8}$	$+\frac{5}{16}$	$-\frac{5}{128}$	$+\frac{3}{256}$	$-\frac{5}{1024}$
$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	$+\frac{35}{8}$	$+\frac{35}{16}$	$+\frac{35}{128}$	$-\frac{7}{256}$	$+\frac{7}{1024}$

Продолжение табл. 3

ν \ m	1	2	3	4	5	6
$-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$+\frac{14}{9}$	$-\frac{140}{81}$	$+\frac{455}{243}$	$-\frac{1456}{729}$	$+\frac{13\,832}{6\,561}$
$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$+\frac{5}{9}$	$-\frac{40}{81}$	$+\frac{110}{243}$	$-\frac{308}{729}$	$+\frac{5236}{6561}$
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{9}$	$-\frac{14}{81}$	$+\frac{35}{243}$	$-\frac{91}{729}$	$+\frac{728}{6561}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$+\frac{5}{81}$	$-\frac{10}{243}$	$+\frac{22}{729}$	$-\frac{154}{6561}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$+\frac{4}{81}$	$-\frac{7}{243}$	$+\frac{14}{729}$	$-\frac{91}{6561}$
$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$+\frac{2}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$+\frac{5}{243}$	$-\frac{8}{729}$	$+\frac{44}{6561}$
$-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$+\frac{45}{32}$	$-\frac{195}{128}$	$+\frac{3315}{2048}$	$-\frac{13\,923}{8\,192}$	$+\frac{348\,075}{32\,768}$
$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$+\frac{21}{32}$	$-\frac{77}{128}$	$+\frac{1155}{2048}$	$-\frac{4389}{8192}$	$+\frac{100\,947}{32\,768}$
$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$+\frac{5}{32}$	$-\frac{15}{128}$	$+\frac{195}{2048}$	$-\frac{663}{8192}$	$+\frac{13\,923}{32\,768}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{32}$	$+\frac{7}{128}$	$-\frac{77}{2048}$	$+\frac{231}{8192}$	$-\frac{4\,389}{32\,768}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{32}$	$+\frac{5}{128}$	$-\frac{45}{2048}$	$+\frac{117}{8192}$	$-\frac{1\,989}{32\,768}$
$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$+\frac{5}{32}$	$-\frac{5}{128}$	$+\frac{35}{2048}$	$-\frac{77}{8192}$	$+\frac{1\,155}{32\,768}$

Таблица 4. **Суммы степеней чисел натурального ряда**

n	$\sum_{k=1}^{n} k$	$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\sum_{k=1}^{n} k^4$	$\sum_{k=1}^{n} k^5$	n	$\sum_{k=1}^{n} k$	$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\sum_{k=1}^{n} k^4$	$\sum_{k=1}^{n} k^5$
1	1	1	1	1	1	26	351	6 201	123 201	2 610 621	57 617 001
2	3	5	9	17	33	27	378	6 930	142 884	3 142 062	71 965 908
3	6	14	36	98	276	28	406	7 714	164 836	3 756 718	89 176 276
4	10	30	100	354	1 300	29	435	8 555	189 225	4 463 999	109 687 425
5	15	55	225	979	4 425	30	465	9 455	216 225	5 273 999	133 987 425
6	21	91	441	2 275	12 201	31	496	10 416	246 016	6 197 520	162 616 576
7	28	140	784	4 676	29 008	32	528	11 440	278 784	7 246 096	196 171 008
8	36	204	1 296	8 772	61 776	33	561	12 529	314 721	8 432 017	235 306 401
9	45	285	2 025	15 333	120 825	34	595	13 685	354 025	9 768 353	280 741 825
10	55	385	3 025	25 333	220 825	35	630	14 910	366 900	11 268 978	333 263 700
11	66	506	4 356	39 974	381 876	36	666	16 206	443 556	12 948 594	393 729 876
12	78	650	6 084	60 710	630 708	37	703	17 575	494 209	14 822 755	463 073 833
13	91	819	8 281	89 271	1 002 001	38	741	19 019	549 081	16 907 891	542 309 001
14	105	1 015	11 025	127 687	1 539 825	39	780	20 540	608 400	19 221 332	632 533 200
15	120	1 240	14 400	178 312	2 299 200	40	820	22 140	672 400	21 781 332	734 933 200
16	136	1 496	18 496	243 848	3 347 776	41	861	23 821	741 321	24 607 093	850 789 401
17	153	1 785	23 409	327 369	4 767 633	42	903	25 585	815 409	27 718 789	981 480 633
18	171	2 109	29 241	432 345	6 657 201	43	946	27 434	894 916	31 137 590	1 128 489 076
19	190	2 470	36 100	562 666	9 133 300	44	990	29 370	980 100	34 885 686	1 293 405 300
20	210	2 870	44 100	722 666	12 333 300	45	1 035	31 395	1 071 225	38 986 311	1 477 933 425
21	231	3 311	53 361	917 147	16 417 401	46	1 081	33 511	1 168 561	43 463 767	1 683 896 401
22	253	3 795	64 009	1 151 403	21 571 033	47	1 128	35 720	1 272 384	48 343 448	1 913 241 408
23	276	4 324	76 176	1 431 244	28 007 376	48	1 176	38 024	1 382 976	53 651 864	2 168 045 376
24	300	4 900	90 000	1 763 020	35 970 000	49	1 225	40 425	1 500 625	59 416 665	2 450 520 625
25	325	5 525	105 625	2 153 645	45 735 625	50	1 275	42 925	1 625 625	65 666 665	2 763 020 625

Таблица 5. **Гудерманианы (gd x)**

x	gd x	x	gd x		gd x		gd x	x	gd x	x	gd x
0,00	0,00000	0,20	0,19868	0,40	0,38974	0,60	0,56694	0,80	0,72625	1,00	0,86579
01	01000	21	20847	41	39897	61	57535	81	73366	01	87223
02	02000	22	21825	42	40817	62	58372	82	74106	02	87863
03	03000	23	22800	43	41733	63	59204	83	74841	03	88499
04	03999	24	23773	44	42645	64	60031	84	75571	04	89130
05	04998	25	24744	45	43554	65	60854	85	76297	05	89756
06	05996	26	25712	46	44459	66	61672	86	77017	06	90377
07	06994	27	26678	47	45359	67	62486	87	77732	07	90993
08	07991	28	27641	48	46256	68	63294	88	78443	08	91604
09	08988	29	28602	49	47149	69	64098	89	79148	09	92211
10	09983	30	29560	50	48038	70	64897	90	79848	10	92812
11	10978	31	30515	51	48923	71	65692	91	80544	11	93410
12	11971	32	31467	52	49803	72	66487	92	81234	12	94002
13	12964	33	32417	53	50680	73	67266	93	81919	13	94589
14	13954	34	33363	54	51552	74	68045	94	82599	14	95172
15	14944	35	34307	55	52420	75	68824	95	83275	15	95750
16	15932	36	35247	56	53284	76	69590	96	83945	16	96323
17	16919	37	36184	57	54143	77	70355	97	84611	17	96892
18	17904	38	37117	58	54997	78	71115	98	85271	18	97455
0,19	0,18887	0,39	0,38047	0,59	0,55848	0,79	0,71870	0,99	0,85926	1,19	0,98015

Продолжение табл. 5

x	gd x	x	gd x	x	gd x	x	gd x	x	gd x	x	gd x
1,20	0,98569	1,40	1,08725	1,60	1,17236	1,80	1,24316	2,00	1,30176	2,20	1,35009
21	99120	41	09188	61	17622	81	24636	01	30441	21	35227
22	0,99665	42	09647	62	18005	82	24954	02	30703	22	35443
23	1,00205	43	10101	63	18384	83	25268	03	30962	23	35656
24	00744	44	10552	64	18760	84	25579	04	31219	24	35868
25	01274	45	10999	65	19132	85	25888	05	31473	25	36077
26	01801	46	11441	66	19500	86	26193	06	31726	26	36285
27	02324	47	11880	67	19866	87	26496	07	31975	27	36490
28	02842	48	12315	68	20228	88	26795	08	32222	28	36694
29	03356	49	12746	69	20586	89	27092	09	32467	29	36895
30	03866	50	13173	70	20941	90	27386	10	32710	30	37095
31	04371	51	13596	71	21293	91	27677	11	32950	31	37292
32	04872	52	14015	72	21642	92	27966	12	33188	32	37488
33	05368	53	14431	73	21987	93	28251	13	33423	33	37682
34	05860	54	14843	74	22330	94	28534	14	33656	34	37873
35	06348	55	15251	75	22668	95	28814	15	33887	35	38063
36	06832	56	15655	76	23004	96	29092	16	34116	36	38251
37	07312	57	16056	77	23337	97	29367	17	34343	37	38438
38	07787	58	16453	78	23666	98	29640	18	34567	38	38622
1,39	1,08258	1,59	1,16846	1,79	1,23993	1,99	1,29909	2,19	1,34789	2,39	1,38805

Продолжение табл. 5

x	gd x	x	gd x	x	gd x	x	gd x	x	gd x	x	gd x
2,40	1,38986	2,60	1,42252	2,80	1,44933	3,00	1,47130	3,20	1,48932	3,40	1,50407
41	39165	61	42399	81	45053	01	47229	21	49013	41	50474
42	39342	62	42545	82	45173	02	47327	22	49093	42	50540
43	39518	63	42689	83	45291	03	47424	23	49172	43	50605
44	39691	64	42832	84	45408	04	47520	24	49251	44	50669
45	39864	65	42973	85	45524	05	47615	25	49329	45	50733
46	40034	66	43113	86	45638	06	47709	26	49406	46	50796
47	40203	67	43251	87	45752	07	47802	27	49482	47	50858
48	40370	68	43388	88	45864	08	47894	28	49558	48	50920
49	40535	69	43524	89	45976	09	47986	29	49632	49	50981
50	40700	70	43659	90	46086	10	48076	30	49706	50	51042
51	40862	71	43792	91	46195	11	48165	31	49780	51	51102
52	41022	72	43924	92	46303	12	48254	32	49852	52	51161
53	41181	73	44054	93	46410	13	48342	33	49924	53	51220
54	41339	74	44183	94	46516	14	48428	34	49995	54	51279
55	41495	75	44311	95	46621	15	48514	35	50066	55	51336
56	41649	76	44438	96	46725	16	48600	36	50135	56	51393
57	41802	77	44564	97	46828	17	48684	37	50204	57	51450
58	41954	78	44688	98	46930	18	48767	38	50273	58	51506
2,59	1,42104	2,79	1,44811	2,99	1,47031	3,19	1,48850	3,39	1,50340	3,59	1,51561

Продолжение табл. 5

x	gd x	x	gd x	x	gd x	x	gd x	x	gd x	x	gd x
3,60	1,51616	3,80	1,52606	4,00	1,53417	4,20	1,54081	4,40	1,54624	4,60	1,55069
61	51671	81	52651	01	53453	21	54111	41	54649	61	55089
62	51724	82	52695	02	53490	22	54140	42	54673	62	55109
63	51778	83	52738	03	53525	23	54169	43	54697	63	55129
64	51830	84	52782	04	53561	24	54198	44	54721	64	55148
65	51883	85	52824	05	53596	25	54227	45	54744	65	55167
66	51934	86	52867	06	53630	26	54255	46	54767	66	55186
67	51985	87	52909	07	53664	27	54283	47	54790	67	55205
68	52036	88	52950	08	53698	28	54311	48	54813	68	55224
69	52086	89	52991	09	53732	29	54339	49	54836	69	55242
70	52136	90	53032	10	53765	30	54366	50	54858	70	55261
71	52185	91	53072	11	53789	31	54393	51	54880	71	55279
72	52234	92	53112	12	53831	32	54420	52	54902	72	55297
73	52282	93	53151	13	53863	33	54446	53	54924	73	55314
74	52330	94	53190	14	53895	34	54472	54	54945	74	55332
75	52377	95	53229	15	53927	35	54498	55	54966	75	55350
76	52424	96	53267	16	53958	36	54524	56	54987	76	55367
77	52470	97	53305	17	53989	37	54550	57	55008	77	55384
78	52516	98	53343	18	54020	38	54575	58	55029	78	55400
3,79	1,52561	3,99	1,53380	4,19	1,54051	4,39	1,54600	4,59	1,55049	4,79	1,55417

Продолжение табл. 5

x	gd x	x	gd x	x	gd x	x	gd x	x	gd x	x	gd x
4,80	1,55434	5,00	1,55732	5,20	1.55976	5,40	1,56176	5,60	1,56340	5,80	1,56474
81	55450	01	55745	21	55987	41	56185	61	56347	81	56480
82	55466	02	55759	22	55998	42	56194	62	56355	82	56486
83	55482	03	55772	23	56009	43	56203	63	56362	83	55492
84	55498	04	55785	24	56020	44	56212	64	56369	84	66498
85	55514	05	55798	25	56030	45	56220	65	56376	85	56504
86	55530	06	55811	26	56041	46	56229	66	56383	86	56509
87	55545	07	55823	27	56051	47	56238	67	56390	87	56515
88	55560	08	55836	28	56061	48	56246	68	56397	88	56521
89	55575	09	55848	29	56071	49	56254	69	56404	89	56526
90	55590	10	55860	30	56081	50	56262	70	56410	90	56532
91	55605	11	55872	31	56091	51	56270	71	56417	91	56537
92	55620	12	55884	32	56101	52	56278	72	56424	92	56543
93	55634	13	55896	33	56111	53	56268	73	56430	93	56548
94	55649	14	55908	34	56120	54	56294	74	56437	94	56553
95	55663	15	55920	35	56130	55	56302	75	56434	95	56558
96	55677	16	55931	36	56139	56	56310	76	56449	96	56564
97	55691	17	55943	37	56149	57	56318	77	56456	97	56569
98	55705	18	55954	38	56158	58	56325	78	56462	98	56574
4,99	1,55719	5,19	1,55965	5,39	1,56167	5,59	1,55333	5,79	1,56468	5,99	1,56579

Продолжение табл. 5

x	gd x	x	gd x	x	gd x	x	gd x	x	gd x	x	gd x
6,00	1,565838	6,20	1,566737	6,40	1,567473	6,60	1,568076	6,80	1,568569	7,00	1,568973
01	565888	21	566778	41	567506	61	568103	81	568591	01	568991
02	565937	22	566818	42	567539	62	568129	82	568613	02	569009
03	565985	23	566857	43	567571	63	568156	83	568635	03	569026
04	566033	24	566897	44	567604	64	568182	84	568656	04	569044
05	566081	25	566935	45	567635	65	568208	85	568677	05	569062
06	566127	26	566997	46	567667	66	568234	86	568698	06	569079
07	566174	27	567012	47	567698	67	568260	87	568719	07	569096
08	566220	28	567050	48	567729	68	568285	88	568740	08	569113
09	566266	29	567087	49	567760	69	568310	89	568760	09	569130
10	566311	30	567124	50	567789	70	568336	90	568781	10	569146
11	566355	31	567160	51	567819	71	568359	91	568801	11	569163
12	566399	32	567196	52	567849	72	568383	92	568821	12	569179
13	566443	33	567232	53	567878	73	568407	93	568840	13	569195
14	566486	34	567267	54	567907	74	568431	94	568860	14	569211
15	566529	35	567303	55	567936	75	558455	95	568880	15	569227
16	566572	36	567338	56	567965	76	568478	96	568898	16	569242
17	566614	37	567372	57	567993	77	568501	97	568917	17	569258
18	566666	38	567406	58	568021	78	568524	98	568936	18	569273
6,19	1,566697	6,39	1,567440	6,59	1,568048	6,79	1,568546	6,99	1,568954	7,19	1,569288

Продолжение табл. 5

x	gd x	x	gd x	x	gd x	x	gd x	x	gd x	x	gd x
7,20	1,569303	7,40	1,569574	7,60	1,569795	7,80	1,569977	8,00	1,570125	8,20	1,570247
21	569318	41	569586	61	569805	81	569985	01	570132	21	570252
22	569333	42	569598	62	569815	82	569993	02	570139	22	570258
23	569347	43	569610	63	569825	83	570001	03	570145	23	570263
24	569362	44	569622	64	569835	84	570009	04	570152	24	570269
25	569376	45	569633	65	569844	85	570017	05	570159	25	570274
26	569390	46	569645	66	569854	86	570025	06	570164	26	570279
27	569404	47	569656	67	569863	87	570032	07	570171	27	570284
28	569418	48	569668	68	569872	88	570040	08	570177	28	570289
29	569432	49	569679	69	569888	89	570047	09	570183	29	570294
30	569445	50	569690	70	569891	90	570055	10	570189	30	570299
31	569459	51	569701	71	569900	91	570062	11	570195	31	570304
32	569472	52	569712	72	569909	92	570069	12	570201	32	570309
33	569485	53	569723	73	569917	93	570077	13	570207	33	570314
34	569498	54	569734	74	569926	94	570084	14	570213	34	570319
35	569511	55	569744	75	569935	95	570091	15	570219	35	570324
36	569524	56	569755	76	569943	96	570098	16	570225	36	570328
37	569537	57	569765	77	569952	97	570105	17	570230	37	570333
38	569550	58	569775	78	569960	98	570112	18	570236	38	570338
7,39	1,569562	7,59	1,569785	7,79	1,569969	7,99	1,570119	8,19	1,570242	8,39	1,570342

Продолжение табл. 5

x	gd x	x	gd x	x	gd x	x	gd x	x	gd x	x	gd x
8,40	1,570347	8,50	1,570389	8,60	1,570428	8,70	1,570463	8,80	1,570495	8,90	1,570524
41	570351	51	570393	61	570432	71	570466	81	570498	91	570526
42	570356	52	570397	62	570435	72	570470	82	570501	92	570529
43	570360	53	570401	63	570439	73	570473	83	570504	93	570532
44	570364	54	570405	64	570443	74	570476	84	570507	94	570534
45	570369	55	570409	65	570446	75	570479	85	570510	95	570537
46	570373	56	570413	66	570450	76	570483	86	570512	96	570539
47	570377	57	570417	67	570453	77	570486	87	570515	97	570542
48	570381	58	570421	68	570456	78	570489	88	570518	98	570544
8,49	1,570385	8,59	1,570424	8,69	1,570460	8,79	1,570492	8,89	1,570521	8,99	570547
										9,00	1,570550

Таблица 6. **Обратные гудерманианы (arg gd x)**

x	arg gd x	x	arg gd x	x	arg gd x	x	arg gd x	x	arg gd x	x	arg gd x
0,00	0,00000	0,23	0,23206	0,46	0,47714	0,69	0,75233	0,92	1,08651	1,15	1,54384
01	01000	24	24234	47	48833	70	76535	93	10313	16	56860
02	02000	25	25265	48	49957	71	77848	94	11997	17	59394
03	03000	26	26298	49	51087	72	79172	95	13704	18	61987
04	04001	27	27334	50	52224	73	80508	96	15435	19	64645
05	05002	28	28373	51	53366	74	81856	97	17192	20	67370
06	06004	29	29415	52	54515	75	83217	98	18974	21	70166
07	07006	30	30462	53	55671	76	84590	0,99	20783	22	73037
08	08009	31	31509	54	56834	77	85976	1,00	22620	23	75987
09	09012	32	32561	55	58003	78	87376	01	24485	24	79022
10	10017	33	33616	56	59180	79	88790	02	26380	25	82147
11	11022	34	34675	57	60364	80	90218	03	28306	26	85367
12	12029	35	35737	58	61555	81	91660	04	30265	27	88689
13	13037	36	36804	59	62755	82	93118	05	32258	28	92120
14	14046	37	37874	60	63962	83	94592	06	34285	29	95667
15	15057	38	38949	61	65178	84	96082	07	36349	30	1,99340
16	16069	39	40028	62	66402	85	97589	08	38451	31	2,03147
17	17082	40	41111	63	67636	86	0,99113	09	40593	32	07100
18	18098	41	42199	64	68878	87	1,00654	10	42776	33	11210
19	19115	42	43292	65	70129	88	02215	11	45003	34	15491
20	20135	43	44390	66	71390	89	03794	12	47275	35	19959
21	21156	44	45493	67	72661	90	05392	13	49594	36	24630
0,22	0,22180	0,45	0,46600	0,68	0,73942	0,91	1,07011	1,14	1,51963	1,37	2,29524

Продолжение табл. 6

x	arg gd x	x	arg gd x	x	arg gd x	x	arg gd x	x	arg gd x	x	arg gd x
1,38	2,34666	1,470	2,987	1,491	3,221	1,511	3,510	1,531	3,917	1,551	4,615
39	40080	471	2,997	492	234	512	527	532	942	552	667
40	45800	472	3,007	493	246	513	544	533	969	553	722
41	51861	473	017	494	259	514	561	534	3,995	554	780
42	58307	474	028	495	272	515	579	535	4,023	555	841
43	65193	475	038	496	286	516	597	536	051	556	907
44	72587	476	048	497	299	517	615	537	080	557	4,976
45	80558	477	059	498	313	518	634	538	110	558	5,052
46	89219	478	070	499	327	519	653	539	141	559	133
47	2,98695	479	081	500	341	520	673	540	173	560	222
48	3,09160	480	092	501	355	521	693	541	206	561	319
49	3,20843	481	103	502	369	522	713	542	241	562	427
50	3,34068	482	114	503	384	523	734	543	276	563	547
51	3,49306	483	125	504	399	524	755	544	313	564	685
52	3,67286	484	137	505	414	525	777	545	351	565	5,844
53	3,89217	485	148	506	429	526	799	546	390	566	6,033
54	4,17343	486	160	507	445	527	821	547	431	567	6,267
55	4,56609	487	172	508	461	528	844	548	474	568	6,573
56	5,22169	488	184	509	477	529	868	549	519	569	7,015
1 57	7,82864	489	196	1,510	3,493	1,530	3,892	1,550	4,566	1,570	7,829
		1,490	3,208								

Таблица 7. **Многочлены Лежандра $P_n(x)$**
(см. стр. 168—169 и 173—174)

x \ n	2	3	4	5	6	7
0,00	—0,5000	0,0000	+0,3750	+0,0000	—0,3125	—0,0000
01	4998	—0,0150	3746	0187	3118	0219
02	4994	0300	3735	0374	3099	0436
03	4986	0449	3716	0560	3066	0651
04	4976	0598	3690	0744	3021	0862
05	4962	0747	3657	0927	2962	1069
06	4946	0895	3616	1106	2891	1270
07	4926	1041	3567	1283	2808	1464
08	4904	1187	3512	1455	2713	1651
09	4878	1332	3449	1624	2606	1828
10	4850	1475	3379	1788	2488	1995
11	4818	1617	3303	1947	2360	2151
12	4784	1757	3219	2101	2220	2295
13	4746	1895	3129	2248	2071	2427
14	4706	2031	3032	2389	1913	2545
15	4662	2166	2928	2523	1746	2649
16	4616	2298	2819	2650	1572	2738
17	4566	2427	2703	2769	1389	2812
18	4514	2554	2581	2880	1201	2870
19	4458	2679	2453	2982	1006	2911
20	4400	2800	2320	3075	0806	2935
21	4338	2918	2181	3159	0601	2943
22	4274	3034	2037	3234	0394	2933
23	4206	3146	1889	3299	—0,0183	2906
24	4136	3254	1735	3353	+0,0029	2861
25	4062	3359	1577	3397	0243	2799
26	3986	3461	1415	3431	0456	2720
27	3906	3558	1249	3453	0669	2625
28	3824	3651	1079	3465	0879	2512
29	3738	3740	0906	3465	1087	2384
30	3650	3825	0729	3454	1292	2241
31	3558	3905	0550	3431	1492	2082
32	3464	3981	0369	3397	1686	1910
33	3366	4052	0185	3351	1873	1724
0,34	—0,3266	—0,4117	+0,0000	+0,3294	+0,2053	—0,1527

Продолжение табл. 7

x \ n	2	3	4	5	6	7
0,35	—0,3162	—0,4178	—0,0187	+0,3225	+0,2225	—0,1318
36	3056	4234	0375	3144	2388	1098
37	2946	4284	0564	3051	2540	0870
38	2834	4328	0753	2948	2681	0635
39	2718	4367	0942	2833	2810	0393
40	2600	4400	1130	2706	2926	—0,0146
41	2478	4427	1317	2569	3029	+0,0104
42	2354	4448	1504	2421	3118	0356
43	2226	4462	1688	2263	3191	0608
44	2096	4470	1870	2095	3249	0859
45	1962	4472	2050	1917	3290	1106
46	1826	4467	2226	1730	3314	1348
47	1686	4454	2399	1534	3321	1584
48	1544	4435	2568	1330	3310	1811
49	1398	4409	2732	1118	3280	2027
50	1250	4375	2891	0898	3232	2231
51	1098	4334	3044	0673	3166	2422
52	0944	4285	3191	0441	3080	2596
53	0786	4228	3332	+0,0204	2975	2753
54	0626	4163	3465	—0,0037	2851	2891
55	0462	4091	3590	0282	2708	3007
56	0296	4010	3707	0529	2546	3102
57	—0,0126	3920	3815	0779	2366	3172
58	+0,0046	3822	3914	1028	2168	3217
59	0222	3716	4002	1278	1953	3235
60	0400	3600	4080	1526	1721	3226
61	0582	3475	4146	1772	1473	3188
62	0766	3342	4200	2014	1211	3121
63	0954	3199	4242	2251	0935	3023
64	1144	3046	4270	2482	0646	2895
65	1338	2884	4284	2705	0347	2737
66	1534	2713	4284	2919	+0,0038	2548
67	1734	2531	4268	3122	—0,0278	2329
68	1936	2339	4236	3313	0601	2081
0,69	+0,2142	—0,2137	—0,4187	—0,3490	—0,0926	+0,1805

Продолжение табл. 7

x \ n	2	3	4	5	6	7
0,70	+0,2350	—0,1925	—0,4121	—0,3652	—0,1253	+0,1502
71	2562	1702	4036	3796	1578	1173
72	2776	1469	3933	3922	1899	0822
73	2994	1225	3810	4026	2214	0450
74	3214	0969	3666	4107	2518	+0,0061
75	3438	0703	3501	4164	2808	—0,0342
76	3664	0426	3314	4193	3081	0754
77	3894	—0,0137	3104	4193	3333	1171
78	4126	+0,0164	2871	4162	3559	1588
79	4362	0476	2613	4097	3756	1999
80	4600	0800	2330	3995	3918	2397
81	4842	1136	2021	3855	4041	2774
82	5086	1484	1685	3674	4119	3124
83	5334	1845	1321	3449	4147	3437
84	5584	2218	0928	3177	4120	3703
85	5838	2603	0506	2857	4030	3913
86	6094	3001	—0,0053	2484	3872	4055
87	6354	3413	+0,0431	2056	3638	4116
88	6616	3837	0947	1570	3322	4083
89	6882	4274	1496	1023	2916	3942
90	7150	4725	2079	—0,0411	2412	3678
91	7422	5189	2698	+0,0268	1802	3274
92	7696	5667	3352	1017	1077	2713
93	7974	6159	4044	1842	—0,0229	1975
94	8254	6665	4773	2744	+0,0751	—0,1040
95	8538	7184	5541	3727	1875	+0,0112
96	8824	7718	6349	4796	3151	1506
97	9114	8267	7198	5954	4590	3165
98	9406	8830	8089	7204	6204	5115
0,99	0,9702	0,9407	0,9022	0,8552	0,8003	0,7384
1,00	+1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000

Таблица 8. **Многочлены Лагерра $L_n(x)$**

(см. стр. 170—171 и 180)

x \ n	2	3	4	5	6	7
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,1	0,8050	0,7148	0,6293	0,5484	0,4717	0,3993
0,2	6200	4587	3147	0,1870	0,0743	—0,0244
0,3	4450	2305	0,0523	—0,0933	—0,2101	3011
0,4	2800	0,0293	—0,1616	3014	3978	4578
0,5	0,1250	—0,1458	3307	4456	5041	5183
0,6	—0,0200	2960	4586	5336	5428	5042
0,7	1550	4222	5487	5730	5265	4340
0,8	2800	5253	6043	5707	4667	3242
0,9	3950	6065	6287	5332	3737	1890
1,0	5000	6667	6250	4667	2569	—0,0405
1,1	5950	7068	5963	3767	—0,1247	0,1110
1,2	6800	7280	5456	2687	0,0157	2569
1,3	7550	7312	4757	1476	1578	3902
1,4	8200	7173	3893	—0,0178	2959	5056
1,5	8750	6875	2891	0,1164	4252	5988
1,6	9200	6427	1776	2513	5417	6668
1,7	9550	5838	—0,0573	3834	6420	7078
1,8	9800	5120	0,0694	5095	7235	7208
1,9	—0,9950	—0,4282	0,2003	0,6270	0,7840	0,7058

Продолжение табл. 8

x \ n	2	3	4	5	6	7
2,0	—1,0000	—0,3333	0,3333	0,7333	0,8222	0,6635
2,1	9950	2285	4663	8263	8371	5952
2,2	9800	—0,1147	5974	9042	8283	5030
2,3	9550	0,0072	7247	0,9653	7958	3891
2,4	9200	1360	8464	1,0084	7401	2564
2,5	8750	2708	0,9609	0325	6620	0,1080
2,6	8200	4107	1,0667	0369	5627	—0,0528
2,7	7550	5545	1623	1,0209	4437	2222
2,8	6800	7013	2464	0,9845	3068	3968
2,9	5950	0,8502	3177	9274	0,1540	5728
3,0	5000	1,0000	3750	8500	—0,0125	7464
3,1	3950	1498	4173	7526	1902	—0,9141
3,2	2800	2987	4437	6358	3766	—1,0722
3,3	1550	4455	4533	5004	5689	2173
3,4	—0,0200	5893	4454	3474	7645	3462
3,5	0,1250	7292	4193	0,1779	—0,9604	4558
3,6	2800	8640	3744	—0,0068	—1,15[illegible]8	5435
3,7	4450	1,9928	3103	2053	3417	6066
3,8	6200	2,1147	2267	4159	5214	6430
3,9	0,8050	2,2285	1,1233	—0,6370	—1,6899	—1,6509

Продолжение табл. 8

x \ n	2	3	4	5	6	7
4,0	1,0000	2,3333	1,0000	—0,8667	—1,8444	—1,6286
4,1	2050	4282	0,8567	—1,1030	—1,9823	5750
4,2	4200	5120	6934	3439	—2,1010	4893
4,3	6450	5838	5103	5873	1978	3710
4,4	1,8800	6427	3077	—1,8310	2706	2201
4,5	2,1250	6875	0,0859	—2,0727	3170	—1,0369
4,6	3800	7173	—0,1546	3099	3351	—0,8222
4,7	6450	7312	4133	5404	3230	5769
4,8	2,9200	7280	6896	7617	2791	3026
4,9	3,2050	7068	—0,9827	—2,9713	2019	—0,0011
5,0	5000	6667	—1,2917	—3,1667	—2,0903	0,3254
5,1	3,8050	6065	6157	3454	—1,9433	0,6744
5,2	4,1200	5253	—1,9536	5050	7602	1,0430
5,3	4450	4222	—2,3043	6429	5405	4280
5,4	4,7800	2960	—2,6666	7568	—1,2841	1,8259
5,5	5,1250	2,1458	—3,0391	8440	—0,9911	2,2329
5,6	4800	1,9707	4203	9023	6619	2,6452
5,7	5,8450	7695	—3,8087	9293	—0,2970	3,0582
5,8	6,2200	5413	—4,2026	9227	0,1025	4677
5,9	6,6050	1,2852	—4,6003	—3,8803	0,5353	3,8690

Продолжение табл. 8

x \ n	2	3	4	5	6	7
6,0	7,0000	1,0000	—5,0000	—3,8000	1,0000	4,2571
6,1	4050	0,6848	3997	6797	1,4947	6273
6,2	7,8200	0,3387	—5,7973	5174	2,0171	4,9744
6,3	8,2450	—0,0395	—6,1907	3114	2,5650	5,2934
6,4	8,6800	4507	5776	—3,0598	3,1355	5790
6,5	9,1250	—0,8958	—6,9557	—2,7612	3,7255	5,8262
6,6	9,5800	—1,3760	—7,3226	4140	4,3319	6,0297
6,7	10,0450	—1,8922	—7,6757	—2,0171	4,9508	1847
6,8	10,5200	—2,4453	—8,0123	—1,5691	5,5785	2859
6,9	11,0050	—3,0365	3297	—1,0693	6,2107	3287
7,0	11,5000	—3,6667	6250	—0,5167	6,8431	3083
7,1	12,0050	—4,3368	—8,8953	0,0892	7,4708	2203
7,2	12,5200	—5,0480	—9,1376	0,7489	8,0889	6,0604
7,3	13,0450	—5,8012	3487	1,4624	8,6924	5,8246
7,4	13,5800	—6,5973	5253	2,2298	9,2756	5092
7,5	14,1250	—7,4375	6641	3,0508	9,8330	5,1110
7,6	14,6800	—8,3227	7616	3,9249	10,3588	4,6269
7,7	15,2450	—9,2538	8143	4,8513	10,8468	4,0543
7,8	15,8200	—10,2320	8186	5,8291	11,2910	3,3912
7,9	16,4050	—11,2582	—9,7707	6,8570	11,6850	2,6359

Продолжение табл. 8

x \ n	2	3	4	5	6	7
8,0	17,0000	—12,3333	—9,6667	7,9333	12,0222	1,7873
8,1	17,6050	—13,4585	5027	9,0563	2961	0,8447
8,2	18,2200	—14,6347	—9,2746	10,2238	4999	—0,1919
8,3	18,8450	—15,8628	—8,9783	11,4333	6269	—1,3219
8,4	19,4800	—17,1440	6096	12,6820	6702	—2,5442
8,5	20,1250	—18,4792	—8,1641	13,9669	6229	—3,8569
8,6	20,7800	—19,8693	—7,6373	15,2845	4782	—5,2576
8,7	21,4450	—21,3155	—7,0247	16,6309	12,2291	—6,7429
8,8	22,1200	—22,8187	—6,3216	18,0021	11,8688	—8,3091
8,9	22,8050	—24,3798	—5,5233	19,3934	11,3905	—9,9514
9,0	23,5000	—26,0000	—4,6250	20,8000	10,7875	—11,6643
9,1	24,2050	—27,6802	—3,6217	22,2166	10,0533	—13,4416
9,2	24,9200	—29,4213	—2,5083	23,6374	9,1814	—15,2764
9,3	25,6450	—31,2245	—1,2797	25,0564	8,1657	—17,1607
9,4	26,3800	—33,0907	0,0694	26,4670	7,0000	—19,0860
9,5	27,1250	—35,0208	1,5443	27,8622	5,6787	—21,0426
9,6	27,8800	—37,0160	3,1504	29,2348	4,1961	—23,0202
9,7	28,6450	—39,0772	4,8933	30,5767	2,5472	—25,0078
9,8	29,4200	—41,2053	6,7787	31,8797	0,7270	—26,9931
9,9	30,2050	—43,4015	8,8123	33,1350	—1,2689	—28,9633

Продолжение табл. 8

x \ n	2	3	4	5	6	7
10,0	31,0000	—45,6667	11,0000	34,3333	—3,4444	—30,9048
10,2	32,6200	—50,4080	15,8614	36,5197	—8,3485	—34,6420
10,4	34,2800	—55,4373	21,4117	38,3546	—14,0077	—38,0782
10,6	35,9800	—60,7627	27,7014	39,7457	—20,4348	—41,0739
10,8	37,7200	—66,3920	34,7824	40,5919	—27,6323	—43,4775
11,0	39,5000	—72,3333	42,7083	40,7833	—35,5903	—45,1258
11,2	41,3200	—78,5947	51,5344	40,2006	—44,2854	—45,8453
11,4	43,1800	—85,1840	61,3174	38,7148	—53,6788	—45,4536
11,6	45,0800	—92,1093	72,1157	36,1873	—63,7152	—43,7607
11,8	47,0200	—99,3787	83,9894	32,4689	—74,3203	—40,5711
12,0	49,0000	—107,0000	97,0000	27,4000	—85,4000	—35,6857
12,2	51,0200	—114,9813	111,2107	20,8102	—96,8376	—28,9045
12,4	53,0800	—123,3307	126,6864	12,5178	—108,4928	—20,0289
12,6	55,1800	—132,0560	143,4934	2,3296	—120,1990	—8,8653
12,8	57,3200	—141,1653	161,6997	—9,9595	—131,7619	4,7721
13,0	59,5000	—150,6667	181,3750	—24,5667	—142,9569	21,0571
13,2	61,7200	—160,5680	202,5904	—41,7215	—153,5274	40,1478
13,4	63,9800	—170,8773	225,4187	—61,6666	—163,1823	62,1818
13,6	66,2800	—181,6027	249,9344	—84,6576	—171,5937	87,2716
13,8	68,6200	—192,7520	276,2134	—110,9633	—178,3950	115,4994

Продолжение табл. 8

x \ n	2	3	4	5	6	7
14,0	71,0000	—204,3333	304,3333	—140,8667	—183,1778	146,9111
14,2	73,4200	—216,3547	334,3734	—174,6646	—185,4900	181,5108
14,4	75,8800	—228,8240	366,4144	—212,6684	—184,8333	219,2538
14,6	78,3800	—241,7493	400,5387	—255,2039	—180,6599	260,0399
14,8	80,9200	—255,1387	436,8304	—302,6123	—172,3709	303,7059
15,0	83,5000	—269,0000	475,3750	—355,2500	—159,3125	350,0179
15,2	86,1200	—283,3413	516,2597	—413,4890	—140,7741	398,6624
15,4	88,7800	—298,1707	559,5734	—477,7174	—115,9851	449,2384
15,6	91,4800	—313,4960	605,4064	—548,3396	—84,1116	501,2469
15,8	94,2200	—329,3253	653,8507	—625,7767	—44,2542	554,0817
16,0	97,0000	—345,6667	705,0000	—710,4667	4,5556	607,0190
16,2	99,8200	—362,5280	758,9494	—802,8647	63,3583	659,2060
16,4	102,6800	—379,9173	815,7957	—903,4438	133,2697	709,6494
16,6	105,5800	—397,8427	875,6374	—1012,6947	215,4839	757,2037
16,8	108,5200	—416,3120	938,5744	—1131,1265	311,2769	800,5581
17,0	111,5000	—435,3333	1004,7083	—1259,2667	422,0097	838,2230
17,2	114,5200	—454,9147	1074,1424	—1397,6618	549,1319	868,5167
17,4	117,5800	—475,0640	1146,9814	—1546,8776	694,1849	889,5503
17,6	120,6800	—495,7893	1223,3317	—1707,4991	858,8059	899,2125
17,8	123,8200	—517,0987	1303,3014	—1880,1315	1044,7312	895,1542

Продолжение табл. 8

x \ n	2	3	4	5	6	7
18,0	127,0000	—539,0000	1387,0000	—2065,4000	1253,8000	874,7714
18,2	130,2200	—561,5013	1474,5387	—2263,9502	1487,9580	835,1885
18,4	133,4800	—584,6107	1566,0304	—2476,4486	1749,2613	773,2401
18,6	136,7800	—608,3360	1661,5894	—2703,5828	2039,8804	685,4524
18,8	140,1200	—632,6853	1761,3317	—2946,0619	2362,1041	568,0240
19,0	143,5000	—657,6667	1865,3750	—3204,6167	2718,3431	416,8060
19,2	146,9200	—683,2880	1973,8384	—3479,9999	3111,1346	227,2807
19,4	150,3800	—709,5573	2086,8427	—3772,9870	3543,1462	—5,4591
19,6	153,8800	—736,4827	2204,5104	—4084,3759	4017,1802	—286,7334
19,8	157,4200	—654,0720	2326,9654	—4414,9877	4536,1774	—622,2972
20,0	161,0000	—792,3333	2454,3333	—4765,6667	5103,2222	—1018,3651

Таблица 9. **Многочлены Эрмита $h_n(x)$**

(см. стр. 171)

x \ n	2	3	4	5	6
0,00	—1,0000	0,00000	3,00000	0,00000	—15,00000
01	—0,9999	03000	2,99940	—0,14999	—14,99550
02	9996	05999	99760	29992	98200
03	9991	08997	99460	44973	95951
04	9984	11994	99040	59936	92804
05	9975	14938	98501	74875	88759
06	9964	17978	97841	—0,89784	83819
07	9951	20966	97062	—1,04657	77986
08	9936	23949	96164	19488	71261
09	9919	26927	95147	34272	63648
10	9900	29900	94010	49001	55150
11	9879	32867	92755	63671	45769
12	9856	35827	91381	78274	35511
13	9831	38780	89889	—1,92807	24378
14	9804	41726	88273	—2,07261	—14,12375
15	9775	44662	86551	21633	—13,99508
16	9744	47590	84706	35914	85781
17	9711	50509	82744	50101	71200
18	9676	53417	80665	64187	55771
19	9639	56314	78470	78166	39500
20	9600	59200	76160	—2,92032	22394
21	9559	62074	73734	—3,05780	—13,04459
22	9516	64935	71194	19404	—12,85703
23	9471	67783	68540	32897	66133
0,24	—0,9424	0,70618	2,65772	—3,46256	—12,45758

Продолжение табл. 9

x \ n	2	3	4	5	6
0,25	—0,9375	0,73438	2,62891	—3,59473	—12,24585
26	9324	76242	59897	72543	—12,02624
27	9271	79032	56791	85460	—11,79883
28	9216	81805	53575	—3,98220	56372
29	9159	84561	50247	—4,10816	32100
30	9100	87300	46810	23243	—11,07077
31	9039	90021	43264	35495	—10,81314
32	8976	92723	39609	47568	54821
33	8911	95406	35846	59454	—10,27610
34	8844	0,98070	31976	71150	— 9,99691
35	8775	1,00713	28001	82650	71076
36	8704	03334	23920	—4,93949	41777
37	8631	05935	19734	—5,05040	— 9,11806
38	8556	08513	15445	15920	— 8,81176
39	8479	11068	11053	26583	49900
40	8400	13600	06560	37024	— 8,17990
41	8319	16108	2,01966	47238	— 7,85461
42	8236	18591	1,97272	57219	52327
43	8151	21049	92479	66963	— 7,18600
44	8064	23482	87588	76465	— 6,84296
45	7975	25888	82601	85720	49429
46	7884	28266	77517	—5,94724	— 5,14014
47	7791	30618	72340	—6,03470	— 5,78067
48	7696	32941	67068	11956	41603
0,49	—0,7599	1,35235	1,61708	—6,20176	— 5,04638

Продолжение табл. 9

x \ n	2	3	4	5	6
0,50	—0,7500	1,37500	1,56250	—6,28125	—4,67188
51	7399	39735	50705	35799	—4,29268
52	7296	41939	45072	43194	—3,90897
53	7191	44112	39350	50305	52091
54	7084	46254	33543	57128	—3,12866
55	6975	48363	27651	63658	—2,73241
56	6864	50438	21674	69391	—2,33233
57	6751	52481	15616	75824	—1,92860
58	6636	54489	09476	81452	52141
59	6519	56462	1,03257	86770	—1,11092
60	6400	58400	0,96960	91776	—0,69734
61	6279	60302	90586	—6,96465	—0,28086
62	6156	62167	84136	—7,00833	0,13835
63	6031	63995	77613	04877	56008
64	5904	65786	71017	08593	0,98414
65	5775	67538	64351	11978	1,41033
66	5644	69250	57615	15027	1,83844
67	5511	70924	50811	17738	2,26829
68	5376	72557	43941	20107	2,69966
69	5239	74149	37007	22131	3,13235
70	5100	75700	30010	23807	3,56615
71	4959	77209	22952	25131	4,00085
72	4816	78675	15834	26101	43624
73	4671	80098	08658	26714	4,87210
0,74	—0,4524	1,81478	0,01427	—7,26966	5,30822

Продолжение табл. 9

x \ n	2	3	4	5	6
0,75	—0,4375	1,82812	—0,05859	—7,26855	5,74438
76	4224	84102	13198	26379	6,18037
77	4071	85347	20587	25535	6,61597
78	3916	86545	28025	24320	7,05094
79	3759	87696	35510	22732	48508
80	3600	88800	43040	20768	7,91814
81	3439	89856	50613	18427	8,34992
82	3276	90863	58228	15706	8,78018
83	3111	91821	65882	12603	9,20869
84	2944	92730	73573	09117	9,63523
85	2775	93588	81299	05246	10,05956
86	2604	94394	89059	—7,00987	10,48144
87	2431	95150	—0,96850	—6,96339	10,90066
88	2256	95853	—1,04670	91301	11,31697
89	2079	96503	12518	85872	11,73015
90	1900	97100	20890	80049	12,13994
91	1719	97643	28285	73832	54613
92	1536	98131	36201	67220	12,94846
93	1351	98564	44135	60212	13,34671
94	1164	98942	52085	52806	13,74064
95	0975	99262	60050	45003	14,13000
96	0784	99526	68025	36801	51456
97	0591	99733	76011	28200	14,89408
98	0396	99881	84003	19200	15,26832
0,99	—0,0199	1,99970	—1,92000	—6,09800	15,63704

Продолжение табл. 9

x \ n	2	3	4	5	6
1,00	—0,0000	2,00000	—2,00000	—6,00000	16,00000
01	0,0201	1,99970	08000	—5,89800	35696
02	0404	99880	16000	79200	16,70768
03	0609	99727	23989	68200	17,05192
04	0816	99514	31974	56801	38944
05	1025	99238	39949	45003	17,72000
06	1236	98898	47912	32807	18,04336
07	1449	98496	55860	20212	35929
08	1664	98029	63791	—5,07221	66754
09	1881	97497	71702	—4,93833	18,96788
10	2100	96900	79590	80051	19,26006
11	2321	96237	87453	65875	54386
12	2544	95507	—2,95288	51306	19,81903
13	2769	94710	—3,03093	36347	20,08535
14	2996	93846	10864	20997	34257
15	3225	92912	18599	—4,05261	59047
16	3456	91910	26296	—3,89138	20,82881
17	3689	90839	33951	72632	21,05736
18	3924	89697	41562	55744	27589
19	4161	88484	49126	38476	48417
20	4400	87200	56640	20832	68198
21	4641	85844	64101	—3,02813	21,86910
22	4884	84415	71507	—2,84423	22,04529
23	5129	82913	78853	65664	21033
1,24	0,5376	1,81338	—3,86139	—2,46538	22,36401

Продолжение табл. 9

x \ n	2	3	4	5	6
1,25	0,5625	1,79688	—3,93359	—2,27051	22,50610
26	5876	77962	—4,00513	—2,07204	63640
27	6129	76162	07595	—1,87001	75468
28	6384	74285	14605	66445	86073
29	6641	72331	21537	45542	22,95434
30	6900	70300	28390	24298	23,03531
31	7161	68191	35160	—1,02704	10342
32	7424	66003	41844	—0,80778	15849
33	7689	63736	48439	58521	20029
34	7956	63390	54942	35936	22865
35	8225	58962	61349	—0,13028	24335
36	8496	56454	67658	+0,10197	24422
37	8769	53865	73865	33736	23105
38	9044	51193	79966	57582	20367
39	9321	48438	85959	0,81731	16189
40	9600	45600	91840	1,06176	10554
41	0,9881	42678	—4,97606	30913	23,03442
42	1,0164	49671	—5,03253	55935	22,94838
43	0449	36579	08778	1,81236	84725
44	0736	33402	14178	2,06810	73085
45	1025	30138	19449	32652	59902
46	1316	26786	24588	58753	45161
47	1609	23348	29591	2,85108	28847
48	1904	19821	34455	3,11710	22,10943
1,49	1,2201	1,16205	—5,39176	3,38551	21,91437

Продолжение табл. 9

x \ n	2	3	4	5	6
1,50	1,2500	1,12500	—5,43750	3,65625	21,70312
51	2801	08705	48174	3,92924	47557
52	3104	04819	52445	4,20440	21,23157
53	3409	1,00842	56559	48166	20,97100
54	3716	0,96774	60511	4,76093	69373
55	4025	92612	64299	5,04214	39965
56	4336	88358	67919	32520	20,08864
57	4649	84011	71367	61003	19,76059
58	4964	79569	74639	5,89654	41540
59	5281	75032	77731	6,18464	19,05298
60	5600	70400	80640	47424	18,67322
61	5921	65672	83362	6,76525	18,27604
62	6244	60847	85892	7,05757	17,86136
63	6569	55925	88228	35111	17,42911
64	6896	50906	90365	64577	16,97920
65	7225	45788	92299	7,94144	51159
66	7556	40570	94027	8,23803	16,02621
67	7889	35254	95544	53543	15,52301
68	8224	29837	96846	8,83354	15,00195
69	8561	24319	97929	9,13224	14,46298
70	8900	18700	98790	43143	13,90607
71	9241	12979	99424	9,73099	13,33120
72	9584	07155	99827	10,03082	12,73834
73	1,9929	0,01228	99995	33078	12,12750
1,74	2,0276	—0,04802	—5,99924	10,63077	11,49865

Продолжение табл. 9

x \ n	2	3	4	5	6
1,75	2,0625	—0,10938	—5,99609	10,93066	10,85181
76	0976	17178	99047	11,23034	10,18698
77	1329	23523	98234	52967	9,50417
78	1684	29975	97164	11,82853	8,80342
79	2041	36534	95834	12,12679	8,08476
80	2400	43200	94240	42432	7,34822
81	2761	49974	92377	12,72099	6,59386
82	3124	56857	90241	13,01665	5,82173
83	3489	63849	87827	31118	5,03188
84	3856	70950	85131	60443	4,22441
85	4225	78162	82149	13,89626	3,39938
86	4596	85486	78877	14,18653	2,55689
87	4969	—0,92920	75309	47509	1,69703
88	5344	—1,00467	71442	14,76179	0,81992
89	5721	08127	67270	15,04648	—0,07434
90	6100	15900	62790	32901	—0,98562
91	6481	23787	57997	60922	—1,91378
92	6864	31789	52886	15,88695	—2,85868
93	7249	39906	46452	16,16205	—3,82016
94	7636	48138	41692	43435	—4,79807
95	8025	56488	35599	70369	—5,79222
96	8416	64954	29171	16,96990	—6,80245
97	8809	73537	22402	17,23280	—7,82854
98	9204	82239	15286	49224	—8,87031
1,99	2,9603	—1,91060	—5,07821	17,74803	—9,92754

Продолжение табл. 9

x \ n	2	3	4	5	6
2,00	3,0000	—2,00000	—5,00000	18,00000	—11,00000
01	0401	09060	—4,91819	24791	—12,08746
02	0804	18241	83274	49176	—13,18967
03	1209	27543	74358	73119	—14,30638
04	1616	39966	65069	18,96605	—15,43732
05	2025	46512	55399	19,19619	—16,58221
06	2436	56182	45346	42139	—17,74077
07	2849	65974	34903	64147	—18,91268
08	3264	75891	24066	19,85623	—20,09764
09	3681	85933	12830	20,06547	—21,29532
10	4100	—2,96100	—4,01190	26899	—22,50538
11	4521	—3,06393	—3,89141	46659	—23,72748
12	4944	16813	76677	65806	—24,96125
13	5369	—3,27360	63794	20,84320	—26,20632
14	5796	38034	50486	21,02178	—27,46230
15	6225	48838	36749	19361	—28,72880
16	6656	59770	22578	35846	—30,00539
17	7089	70831	—3,07966	51612	—31,29167
18	7524	82023	—2,92909	66635	—32,58718
19	7961	—3,93346	77402	80895	—33,89148
20	8400	—4,04800	61440	21,94368	—35,20410
21	8841	16386	45017	22,07031	—36,52456
22	9284	28105	28127	18862	—37,85237
23	3,9729	39957	—2,10767	29836	—39,18702
2,24	4,0176	—4,51942	—1,92929	22,39931	—40,52799

Продолжение табл. 9

x \ n	2	3	4	5	6
2,25	4,0625	—4,64062	—1,74609	22,49121	—41,87476
26	1076	76318	55802	57383	—43,22675
27	1529	—4,88708	36502	64693	—44,58343
28	1984	—5,01235	—1,16704	71025	—45,94419
29	2441	13899	—0,96402	76355	—47,30846
30	2900	26700	75590	80657	—48,67561
31	3361	39639	54264	83905	—50,04503
32	3824	52717	32417	86075	—51,41608
33	4289	65934	—0,10044	87138	—52,78810
34	4756	79290	0,12860	87070	—54,16042
35	5225	—5,92788	36301	85844	—55,53235
36	5696	—6,06426	60284	83431	—56,90320
37	6169	20205	0,84817	79806	—58,27223
38	6644	34127	1,09903	74240	—59,63872
39	7121	48192	35549	68806	—61,00190
40	7600	62400	61760	61376	—62,36102
41	8081	76752	1,88543	52621	—63,71529
42	8564	—6,91249	2,15902	42512	—65,06390
43	9049	—7,05891	43844	31021	—66,40603
44	4,9536	20678	2,72375	18118	—67,74084
45	5,0025	35612	3,01501	22,03773	—69,06748
46	0516	50694	31226	21,87958	—70,38507
47	1009	65922	61558	70641	—71,69273
48	1504	81299	3,92502	51792	—72,98954
2,49	5,2001	—7,96825	4,24064	21,31380	—74,27457

Продолжение табл. 9

x \ n	2	3	4	5	6
2,50	5,2500	— 8,12500	4,56250	21,09375	—75,54688
51	3001	28325	4,89066	20,85745	—76,80549
52	3504	44301	5,22518	60458	—78,04944
53	4009	60428	56612	33482	—79,27770
54	4516	76706	5,91354	20,04786	—80,48927
55	5025	— 8,93138	6,26751	19,74336	—81,68310
56	5536	— 9,09722	62807	42100	—82,85812
57	6049	26459	6,99530	19,08044	—84,01325
58	6564	43251	7,36926	18,72135	—85,14740
59	7081	60398	7,75001	18,34340	—86,25944
60	7600	77600	8,13760	17,94624	—87,34822
61	8121	— 9,94958	53211	52953	—88,41260
62	8644	—10,12473	8,93359	17,09291	—89,45137
63	9169	30145	9,34211	16,63605	—90,46334
64	5,9696	47974	9,75772	16,15858	—91,44728
65	6,0225	65962	10,18051	15,66016	—92,40195
66	0756	—10,84110	10,61052	15,14041	—93,32608
67	1289	—11,02416	11,04782	14,59899	—94,21837
68	1824	20883	11,49247	14,03551	—95,07751
69	2361	39511	11,94454	13,44961	—95,90218
70	2900	58300	12,40410	12,84093	—96,69101
71	3441	77251	12,87120	12,20908	—97,44263
72	3984	—11,96365	13,34592	11,55368	—98,15563
73	4529	—12,15642	13,82832	10,87436	—98,82859
2,74	6,5076	—12,35082	14,31846	10,17072	—99,46007

Продолжение табл. 9

x \ n	2	3	4	5	6
2,75	6,5625	—12,54688	14,81641	9,44238	—100,04858
76	6176	74458	15,32223	8,68895	—100,59265
77	6729	—12,94393	15,83600	7,91003	—101,09075
78	7284	—13,14495	16,35777	7,10522	54134
79	7841	34764	16,88761	6,27412	—101,94285
80	8400	55200	17,42560	5,41632	—102,29370
81	8961	75804	17,97180	4,53142	59226
82	6,9524	—13,96577	18,52627	3,61900	—102,83692
83	7,0089	—14,17519	19,08908	2,67865	—103,02599
84	0656	38630	19,66030	1,70995	15779
85	1225	59912	20,24001	0,71248	23061
86	1796	—14,81366	20,82826	— 0,31419	—103,24270
87	2369	—15,02990	21,42512	— 1,37048	19231
88	2944	24787	22,03067	— 2,45685	—103,07764
89	3521	46757	22,64497	— 3,57370	—102,89688
90	4100	68900	23,26810	— 4,72149	64818
91	4681	—15,91217	23,90012	— 5,90066	—102,32967
92	5264	—16,13709	24,54110	— 7,11165	—101,93946
93	5849	36376	25,19111	— 8,35492	—101,47563
94	6436	59218	25,85022	— 9,63091	—100,93622
95	7025	—16,82238	26,51851	—10,94009	—100,31926
96	7616	—17,05434	27,19603	—12,28292	— 99,62273
97	8209	28807	27,88288	—13,65985	— 98,84462
98	8804	52359	28,57910	—15,07136	— 97,98286
2,99	7,9401	—17,76090	29,28479	—16,51792	— 97,03536

Продолжение табл. 9

x \ n	2	3	4	5	6
3,00	8,0000	—18,00000	30,00000	—18,00000	—96,00000
01	0601	24090	30,72481	—19,51808	—94,87464
02	1204	48361	31,45930	—21,07264	—93,65710
03	1809	72813	32,20352	—22,66417	—92,34518
04	2416	—18,97446	32,95757	—24,29316	—90,93665
05	3025	—19,22262	33,72151	—25,96009	—89,42924
06	3636	47262	34,49540	—27,66548	—87,82067
07	4249	72444	35,27934	—29,40980	—86,10861
08	4864	—19,97811	36,07338	—31,19358	—84,29071
09	5481	—20,23363	36,87761	—33,01731	—82,36458
10	6100	49100	37,69210	—34,88151	—80,32782
11	6721	—20,75023	38,51692	—36,78669	—78,17798
12	7344	—21,01133	39,35214	—38,73338	—75,91259
13	7969	27430	40,19785	—40,72208	—73,52913
14	8596	53914	41,05411	—42,75334	—71,02509
15	9225	—21,80588	41,92101	—44,82767	—68,39787
16	8,9856	—22,07450	42,79861	—46,94562	—65,64489
17	9,0489	34501	43,68699	—49,10771	—62,76351
18	1124	61743	44,58623	—51,31450	—59,75107
19	1761	—22,89176	45,49641	—53,56652	—56,60487
20	2400	—23,16800	46,41760	—55,86432	—53,32218
21	3041	44616	47,34988	—58,20846	—49,90023
22	3684	—23,72625	48,29332	—60,59949	—46,33622
23	4329	—24,00827	49,24800	—63,03798	—42,62734
3,24	9,4976	—24,29222	50,21401	—65,52448	—38,77070

Продолжение табл. 9

x \ n	2	3	4	5	6
3,25	9,5625	—24,57812	51,19141	— 68,05957	—34,76343
26	6276	—24,86598	52,18028	— 70,64381	—30,60257
27	6929	—25,15578	53,18071	— 73,27779	—26,28518
28	7584	44755	54,19277	— 75,96208	—21,80823
29	8241	—25,74129	55,21654	— 78,69726	—17,16871
30	8900	—26,03700	56,25210	— 81,48393	—12,36353
31	9,9561	33469	57,29953	— 84,32267	— 7,38959
32	10,0224	63437	58,35890	— 87,21408	— 2,24376
33	0889	—26,93604	59,43030	— 90,15876	3,07716
34	1556	—27,23970	60,51381	— 93,15731	8,57637
35	2225	54538	61,60951	— 96,21035	14,25713
36	2896	—27,85306	62,71747	— 99,31847	20,12272
37	3569	—28,16275	63,83778	—102,48230	26,17646
38	4244	47447	64,97052	—105,70245	32,42172
39	4921	—28,78822	66,11576	—108,97956	38,86189
40	5600	—29,10400	67,27360	—112,31424	45,50042
41	6281	42182	68,44411	—115,70713	52,34076
42	6964	—29,74169	69,62737	—119,15886	59,38645
43	7649	—30,06361	70,82347	—122,67008	66,64102
44	8336	38758	72,03249	—126,24143	74,10806
45	9025	—30,71362	73,25451	—129,87355	81,79120
46	10,9716	—31,04174	74,48961	—133,56709	89,69411
47	11,0409	37192	75,73787	—137,32273	97,82050
48	1104	—31,70419	76,99939	—141,14110	106,17410
3,49	11,1801	—32,03855	78,27424	—145,02289	114,75870

Продолжение табл. 9

x \ n	2	3	4	5	6
3,50	11,2500	—32,37500	79,56250	—148,96875	123,57812
51	3201	—32,71355	80,86426	—152,97936	132,63624
52	3904	—33,05421	82,17961	—157,05540	141,93696
53	4609	39700	83,50863	—161,19755	151,48421
54	5316	—33,74186	84,85140	—165,40649	161,28200
55	6025	—34,08888	86,20801	—169,68292	171,33434
56	6736	43802	87,57854	—174,02753	181,64531
57	7449	—34,78929	88,96308	—178,44101	192,21902
58	8164	—35,14271	90,36171	—182,92407	203,05963
59	8881	49828	91,77452	—187,47742	214,17132
60	11,9600	—35,85600	93,20160	—192,10176	225,55834
61	12,0321	—36,21588	94,64303	—196,79782	237,22496
62	1044	57793	96,09890	—201,56630	249,17552
63	1769	—36,94215	97,56929	—206,40795	261,41438
64	2496	—37,30854	99,05430	—211,32348	273,94595
56	3225	—37,67712	100,55401	—216,31362	286,77469
66	3956	—38,04790	102,06850	—221,37912	299,90510
67	4689	42086	103,59787	—226,52072	313,34171
68	5424	—38,79603	105,14220	—231,73916	327,08912
69	6161	—39,17341	106,70158	—237,03519	341,15196
70	6900	55300	108,27610	—242,40957	355,53491
71	7641	—39,93481	109,86585	—247,86306	370,24269
72	8384	—40,31885	111,47091	—253,39641	385,28007
73	9129	—40,70512	113,09139	—259,01040	400,65187
3,74	12,9876	—41,09362	114,72735	—264,70581	416,36295

Продолжение табл. 9

x \ n	2	3	4	5	6
3,75	13,0625	—41,48438	116,37891	—270,48340	432,41821
76	1376	—41,87738	118,04613	—276,34396	448,82262
77	2129	—42,27263	119,72913	—282,28827	465,58116
78	2884	—42,67015	121,42797	—288,31714	482,69890
79	3641	—43,06994	123,14277	—294,43134	500,18093
80	4400	47200	124,87360	—300,63168	518,03238
81	5161	—43,87634	126,62056	—306,91897	536,25847
82	5924	—44,28297	128,38374	—313,29401	554,86442
83	6689	—44,69189	130,16323	—319,75761	573,85552
84	7456	—45,10310	131,95912	—326,31060	593,23712
85	8225	51662	133,77151	—332,95380	613,01460
86	8996	—45,93246	135,60048	—339,68803	633,19339
87	13,9769	—46,35060	137,44613	—346,51413	653,77900
88	14,0544	—46,77107	139,30856	—353,43292	674,77694
89	1321	—47,19387	141,18785	—360,44526	696,19282
90	2100	—47,61900	143,08410	—367,55200	718,03226
91	2881	—48,04647	144,99740	—374,75396	740,30096
92	3664	47629	146,92785	—382,05202	763,00466
93	4449	—48,90846	148,87554	—389,44703	786,14914
94	5236	—49,34298	150,84056	—396,93986	809,74026
95	6025	—49,77988	152,82301	—404,53137	833,78390
96	6816	—50,21914	154,82298	—412,22245	858,28601
97	7609	—50,66077	156,84057	—420,01397	883,25260
98	8404	—51,10479	158,87587	—427,90680	908,68972
3,99	14,9201	—51,55120	160,92898	—435,90185	934,60346
4,00	15,0000	—52,00000	163,00000	—444,00500	961,00000